CORSO
DI
MATEMATICHE

AD USO DEGLI ASPIRANTI

Alla Scuola d' Artiglieria e Genio di Modena

TOMO QUINTO

Contenente un' Appendice all' Algebra del Dott. PAOLO RUFFINI, *fatta da lui medesimo; Un Opuscolo di* GIUSEPPE TRAMONTINI, *sul Metodo delle tre Coordinate, e gl' Elementi di Geografia Sferica, con i Canoni principali della Trigonometria parimenti Sferica, di* CARLO BENFERERI, *tutti e tre Professori nella Scuola suddetta.*

MODENA
Presso la Società Tipografica
MDCCCVIII.

AVVISO

Doveva col quarto Volume terminare il Corso di Matematiche ad uso degli Aspiranti alla Scuola d' Artiglieria, e Genio in Modena, se nel Tomo terzo avessero potuto aver luogo le prime applicazioni dell' Algebra alla Geometria, le serie Algebriche, e le nozioni prime de' Logaritmi. Però, siccome la mole di quello sarebbe riuscita sproporzionata al suo sesto, ed incomoda all' uso, così si rese necessario questo quinto Volume che in gran

parte comprende l'Appendice all'Algebra promessa nel terzo, e questa parte dev' essere considerata prima del quarto.

Ma giacchè si è dovuto estendere a cinque tomi il Corso indicato, si pensò di non lasciar nulla indietro di quanto appartenendo tuttavia agli Elementi di Matematica mostrasse almeno in distanza il vasto campo ch' ella presenta ai curiosi di più sublimi cognizioni. Pertanto all' Appendice dell'Algebra, che già tende all'oggetto qui rimarcato, si sono fatti succedere due Opuscoli, l'uno del Professore Giuseppe Tramontini contenente le Nozioni preliminari sul metodo delle tre coordinate; l'altro del Professore Carlo Benfereri, che comprende i Canoni, l' uso, e l' oggetto principale della Trigonometria Sferica. E siccome questo Professore fu sempre solito di far servire questa parte di Matematica elementare alle lezioni di Geografia Sferica, le quali pone alla testa del Corso di Fisica che insegna

nella Scuola, così per abbreviare notabilmente la stessa Trigonometria Sferica astratta, e per renderne più ameno lo studio, ha creduto meglio di mostrarla immediatamente applicata alla Geografia Sferica, di cui per conseguenza dà le nozioni più necessarie, ed espone e spiega i fenomeni più interessanti.

Nè per questo solo titolo si è superato l' objetto, che potrebbe venir fatto, di non avere contenuta l' opera nei confini della pura Matematica; ma si ebbe di mira particolarmente il vantaggio che gli Aspiranti alla Scuola possono ricavare dallo studio di questo quinto Volume. Quantunque negli esami non si esigeranno di esso che le cognizioni comprese nell' Appendice all' Algebra; pure sarà per loro di sommo giovamento l' acquistare un' idea delle altre cose ancora; poichè il fine di detta Appendice, ed i due successivi Opuscoli danno loro a conoscere la natura de' principali Studj, che appena ricevuti

nella Scuola hanno ad intraprendere, e questi anelli di comunicazione fra gli Studj preliminari, ed il Corso che si spiega nella Scuola predisponendo gli Alunni, faranno loro assai utilmente guadagnare quel tempo, che in passato si riconobbe per esperienza doversi indispensabilmente impiegare nello sviluppare in loro pe' nuovi studj l' attitudine conveniente.

APPENDICE

ALL' ALGEBRA

PARTE PRIMA

DELLE PRIME APPLICAZIONI DELL' ALGEBRA ALLA GEOMETRIA

CAPO I.

Dei luoghi geometrici determinati di primo grado, e della costruzione delle Equazioni di 1.° grado.

1. *Scol.* 1. I. Supponghiamo più rette AB, CD, EF, GH ec. MN, tali che CD = 2AB, EF = 3AB, GH = 4AB, ec. se chiameremo 1 la prima AB, è chiaro che sarà CD = 2, EP = 3, GH = 4, ec., d'onde apparisce che, posta come unità una retta AB di una data lunghezza, per esempio d'un metro, il suo doppio CD si esprimerà col numero 2, il triplo EF col 3, il quadruplo GH col 4, e in generale una retta qualunque MN uguale alla AB replicata le volte a verrà espressa da questa lettera a. Dunque i numeri ci potranno esprimere le quantità lineari, riferendo queste ad una data retta presa come unità (*n.° 4. Algebra*). Fig. 1

II. Ciò essendo potremo applicare il calcolo alle quantità geometriche, e di questo per conseguen-

za ci potremo servire nella soluzione dei Problemi che diconsi *geometrici*, cioè di que' problemi, che riguardano le quantità estese. Vogliasi difatti a cagion d'esempio allungare una data retta AB già prima divisa in un dato punto C sino ad un punto D tale, che il rettangolo di tutta la AD in DB uguagli il quadrato della CD.

Fig. 2

Poichè la AB è data, supponghasi che sia d'una lunghezza a, ossia si ponga $AB = a$; ed essendo dato il punto C avremo cognita ancora la retta CB, onde la porrò $= b$ (*prec.* I); il prolungamento poi BD formando la quantità incognita, lo chiamerò x.

Per la condizione del Problema dev' essere il rettangolo della AD nella DB uguale al quadrato della CD, ossia dev' essere $AD \times DB = \overline{CD}^2$: dunque avendosi $AD = AB + BD = a + x$, $BD = x$, $CD = CB + BD = b + x$, sostituendo sarà $(a+x)x = (b+x)^2$, ossia $ax + x^2 = b^2 + 2bx + x^2$, e quindi $(a-2b)x = b^2$. Abbiamo ora un' Equazione, da cui si ricava $x = \frac{b^2}{a-2b}$: dunque esprimendosi da questo risultato il valore del prolungamento da aggiungersi alla AB, col fare $BD = \frac{b^2}{a-2b}$, avremo la soluzione del proposto Problema.

III. Ma come potremo ottenere la retta BD uguale all' espressione algebraica $\frac{b^2}{a-2b}$? Quivi è dove differiscono fra loro i Problemi algebraici ed i geometrici: ottenute negli uni, e negli altri egualmente le Equazioni dipendenti dalle condizioni date, nei primi non abbisogna, che di sciogliere queste, affin d'avere la soluzion del Problema, ma nei secondi, oltre la soluzione delle Equazioni, conviene determinare le quantità geometriche, che corrispondono ai valori algebraici delle incognite. L'eseguire questa operazione ciò è, che rapporto alle

Equazioni dicesi *costruire le Equazioni*, e rapporto alle semplici espressioni algebraiche, dicesi, *ritrovare i luoghi geometrici*, che a queste corrispondono. Nel capo presente si espongono i metodi e le leggi di tale operazione per le espressioni algebraiche razionali determinate, e quindi per le Equazioni determinate di 1.° grado.

2. *Prob.* 1. Avendosi la retta $AB = a$, e l'altra CD $= b$, si cerca il luogo geometrico della somma $a + b$. Fig. 3

Sol. Supposto, che il valore, che si domanda, debba cominciare dal punto E, ed estendersi orizzontalmente ed alla destra dello stesso E; si conduca in tale direzione una retta $EF = AB = a$, si prolunghi questa nella direzione medesima fino ad un punto G tale, che $FG = CD = b$; e risultando la EG una sola retta, e però un solo Tutto, di cui $EF = a$, $FG = b$ sono le parti, che lo compongono, sarà essa EG il domandato luogo geometrico della somma $a + b$ (*n.*° 18 *Alg.*).

3. *Scol.* 2. I. Se le rette date siano più di due, per esempio le tre $AB = a$, $CD = b$, $HI = c$; allora, supposto che il valore richiesto debba nel modo del (*n. prec.*) cominciare dal punto K, ed estendersi alla sua destra, trovo come nel citato (*n. prec.*) la $KM = a + b$, prolungo nuovamente questa KM alla destra di M sino che si ottenga $MN = HI = c$, e sarà $KN = a + b + c$. Lo stesso si pratica, qualunque altro sia il numero delle rette proposte.

II. Che se si avesse voluto, che i luoghi geometrici delle somme $a + b$ (*n.*° 2), $a + b + c$ (*prec.* I) cominciando rispettivamente dagli stessi punti E, K, si estendessero alla loro sinistra; allora, operando da questa parte sinistra nel modo stesso, come si è ne' citati (*n.* 2, *prec.* I) operato alla destra, si sarebbero determinate, pe' domandati luoghi geometrici, le rette EG', KN', risulando $EG' = a + b$, $KN' = a + b + c$.

III. Condotta, come nel (*n.*° 2), una retta $PQ = a$, dall' estremo Q si tiri un' altra retta $QR = b$, la quale faccia con la PQ un angolo qualunque si voglia. Ciò fatto, siccome si ha la figura PQR formata delle due rette PQ, QR, e siccome per costruzione si ha $PQ = a$ $QR = b$, non potrebbe tal figura PQR costituire essa il luogo geometrico della somma $a + b$? Rispondo che no. Difatti mentre si cerca di effettuare una somma, cercasi propriamente di formare un solo Tutto omogeneo alle parti che lo compongono; ma le parti, le quali nel caso nostro deggiono costituire questo solo Tutto, sono linee rette, cioè le due AB, CD: dunque eziandio la loro somma dovrà essere una linea retta. Ora la figura PQR non è che l' accozzamento di due rette fra loro diverse, cioè delle due PQ, QR porzioni delle rette tra loro differenti PF, RV, e però non essendo una retta sola, non è una figura omogenea alle date AB, CD. Dunque ec. Vero è bensì, che avendosi $PQ = a$, $QR = b$, si può dire che la lunghezza PQR uguaglia la somma $a + b$; ma nel dire in tal modo non dicesi già che essa PQR costituisca simile somma, dicesi solamente, che la lunghezza delle PQ, QR, uguaglia una retta, la cui lunghezza è $a + b$.

4. *Probl.* 2. Date le due rette $AB = a$, $CD = b$ vogliasi il valore geometrico della differenza $a - b$. (Fig. 4)

Sol. Stabilito, che il chiesto valore debba cominciare dal punto E, ed estendersi alla sua destra si conduca in questa direzione la $EF = AB = a$, quindi dall' estremo F venendo verso E, si applichi sopra della FE una retta $FG = CD = b$, e risultando $EG = EF - FG = a - b$, sarà questa EG il valor domandato. Se un tale valore si fosse richiesto alla sinistra del punto E, condotta a questa direzione sinistra la EF, avrei proseguito ad operare come precedentemente.

5. *Scol.* 3.° I. Se il punto da cui si vuole,

che incomincino i valori delle $a+b$, $a-b$ (n. 2, 4) fosse stato il punto A, e se nella direzione medesima della AB avessero essi dovuto estendersi; allora invece delle rette EF = AB, dovevamo prolungare nel Problema del (*n.*° 2) la stessa AB, ed alla AB sovrapporre nel Problema del (n.° 4) la supposta CD, e si sarebbero ottenuti egualmente e più brevemente i valori geometrici delle date espressioni $a+b$, $a-b$. Fig. 3, 4

II. Supposta una retta indefinita XY, e supposto che da un suo punto K comincino a computarsi le sue porzioni; io dico, che, se le porzioni per esempio KL, KM, ec. di lei, che si prendono alla destra di K, si assumono positive, le porzioni, che si prendono nella direzione contraria, cioè alla sinistra di K, come per esempio le KL', KM', ec. si dovranno considerare negative.

Difatti nello stabilire il punto K, si è fissato un termine nella nostra indefinita XY, il quale costituisce due parti della retta data, cioè le due XK, YK. Ora mentre si dice siano le KL, KM, ec. quantità positive, altro non si dice, se non se *si considerino* le KL KM ec., *come aggiunte* (*n.* 25 *Alg.*), ed aggiunte ad un' altra retta, da cui facciamo astrazione (*n.* 26 *Alg.*): ma esse KL, KM, ec., mentre si considerano in questo stato, non si possono considerare aggiunte ossia sommate, se non che con la XK (*n.*° 2, III. *n.*° 3, *n.*° 4). Dunque, mentre si dice siano le KL, KM, e così le altre porzioni, che si estendono alla destra di K, *positive*, tacitamente si dice ancora, sia la XK quella retta, da cui si fa astrazione, e con la quale le citate KL, KM, ec. vogliónsi considerare come sommate. Ora mentre si cerca, quali debbansi considerare le KL', KM', ec. rapporto alle KL, KM, ec. già poste positive; altro infine non si fa, che cercare qual maniera di combinazione debba considerarsi, che abbiano le KL', KM', ec. con quella

retta, con cui le KL, KM, ec. si considerano unite positivamente. Dunque l'eseguire l'indicata richiesta riguardante le KL', KM' altro non sarà che cercare in qual modo queste rette si debbono considerare unite alla XK; ma a questa XK le più volte mentovate KL', KM', ec. non possono considerarsi unite che negativamente (*n.*° 30 *Alg.*), poichè la loro posizione medesima fa sì che da essa XK non possano, che rimanere sottratte (*n.* 2, 4). Dunque lo stabilire le KL, KM, ec. alla destra di K positive, portando necessariamente, che la posizione della retta, da cui si fa astrazione (*n.*° 26 *Alg.*), sia la XK, fa in modo ancora, che le KL', KM', ec. alla sinistra di K debbansi prendere negative; dunque ec.

III. Se si avessero volute positive le porzioni KL', KM', ec. che si estendono alla sinistra del punto K; allora la retta, con cui queste KL' KM', ec. si considerano sommate, e dalla quale si fa astrazione, sarebbe stata la YK, e col discorso del (*prec.* II) sarebbesi dimostrato doversi allora considerar negative le porzioni KL, KM, ec. che scorrono alla destra di K.

IV. Poichè stabilite le KL, KM, ec. positive, e quindi le KL', KM', ec. negative (*prec.* II), si fa poi (*n.*° 26 *Alg.*) astrazione da quella retta XK, a cui le prime debbonsi considerare sommate, e le seconde sottratte; ne segue, che eseguita attualmente una simile astrazione, non più rimangono a considerarsi nella figura, che le rette KL, KM, ec., e le altre KL' KM', ec., ma nella nostra ipotesi quelle sono positive e queste negative. Dunque, posto un punto K, se le rette KL KM, ec. le quali prendonsi alla sua destra, si considerano positive, le rette KL', KM', ec., le quali scorrono alla sua sinistra, si dovranno considerare negative; e per conseguenza, volendosi accennare questo loro stato, mentre le prime si scrivono + KL,

+ KM, ec., le seconde dovranno scriversi — KL' — KM', ec. Se si fossero poste positive le KL', KM', ec. alla sinistra di K, pel (*prec.* III) sarebbero risultate negative le rette a destra KL, KM, ec. Che se la posizione delle rette finora considerate (*prec.* II, III, IV) in vece di essere orizzontale, fosse stata verticale, od un'altra qualunque, è chiaro, che avrebbero avuto sempre luogo egualmente i discorsi e le conseguenze de' citati (*prec.* II, III, IV.). Siccome poi, generalmente parlando, è arbitrario il porre positive quelle rette, le quali si estendono in una direzione determinata, piuttosto che quelle, le quali scorrono nella direzione opposta; ne segue, che per semplicità maggiore porremo, e riterremo, quando non si avverta il contrario, nelle rette orizzontali, positive quelle, che scorrono alla destra, negative quelle, che si estendono alla sinistra di un punto dato; e nelle rette verticali porremo positive quelle, che partendo da un dato luogo scorrono all' insù, negative quelle, che ne discendono.

V. Riguardo alle rette $AB = a$, $CD = b$ date nel Problema del (*n.*° 4), se sia $CD = AB$, ne verrà $FG = EF$, e però cadendo per la fatta sovrapposizione (*n.*° 4) il punto G sopra E, il valore EG diverrà zero; come difatti deve essere, perchè avendosi $a = b$, risulta $a - b = o$. Fig. 4

VI. Ma nel caso, nel quale la quantità da sottrarsi $CD = b$ sia più grande dell' altra $AB = a$; eseguita al solito sopra della $EF = AB$ la posizione della $FG = CD$, l'altro estremo G cadrà alla sinistra del punto E, e la porzione EG uguaglierà in lunghezza la differenza che passa tra le EF, FG, ossia le AB, CD; ma scorrendo questa EG alla sinistra del punto E deve pel (*prec.* IV) avere il valore negativo, perchè la EF, che scorre alla destra di E, si è presa positiva, ed essendo $a < b$ per la ipotesi, abbiamo $a - b$ quantità negativa. Fig. 5

Dunque sarà esattamente $-EG = a - b$. Pertanto in tutti i casi (*n.*° 4, *prec.* V, VI) l' esposta operazione del (*n.*° 4) somministra il valore geometrico corrispondente alla differenza $a - b$.

VII. Se venga data l' espressione $a + b - c + d - e$; poichè si riduce alla $(a + b + d) - (c + e)$, potremo averne il valore geometrico, determinando prima i valori delle $a + b + d$, $c + e$ (*n.*° 2, I *n.*° 3); e chiamati questi m, n, determinando in seguito il valore della $m - n$ (*n.*° 4). Lo stesso si dica di tutti gli altri casi simili.

6. *Probl.* 3. Trovare il valore geometrico, che corrisponde al prodotto ab, avendosi a=AB, b=CD.

Sol. Si faccia con i lati MN=AB, MP=CD il rettangolo NP. Il valore della sua area sappiamo, che si determina, moltiplicando fra loro i valori dei due lati. Dunque essendo esso valore $= ab$; la quantità geometrica, che corrisponde al prodotto ab, sarà l' indicato rettangolo NP.

Fig. 6

7. *Scol.* 4. I. Le rette date se siano le tre AB $= a$, CD $= b$, EF $= c$, il loro prodotto abc è chiaro che corrisponderà ad un parallelepipedo rettangolo avente i tre lati AB, CD, EF.

II. Ma se le rette date siano più di tre, poichè le quantità estese non possono giammai sorpassare le tre dimensioni, ne viene, che sarà impossibile trovare alcun valore geometrico, che corrisponda al loro prodotto algebraico; così se le rette siano le quattro AB$= a$, CD$= b$, EF$= c$, GH$= d$, impossibile sarà il ritrovare alcuna quantità geometrica che sia uguale al prodotto algebraico $abcd$.

III. Se sia $a = b = c$, e però AB = CD = EF; avremo AB $\times$ CD $= a^2$, AB $\times$ CD $\times$ EF $= a^3$, e per conseguenza la seconda, e la terza potenza algebrica corrispondono al quadrato, ed al cubo nelle quantità geometriche; ed alle espressioni a^4, a^5 ec. pel (*prec.* II) non corrisponderà alcun valore geometrico.

8. *Scol.* 5. I. Supposte le due rette indefinite GF, CB perpendicolari ad una stessa AD data di posizione, e supposta questa AD verticale, si considerino positive le aree ADFB, che fra le rette DF, AB scorrono alla destra della AD: in conseguenza di ciò con un discorso affatto simile a quello dei (II, IV. *n.*° 5) troveremo doversi considerar negative le aree, che tra le DG, AC scorrono alla sinistra della stessa AD. Si prolunghi indefinitamente questa AD, e condotta ad una data distanza AB un'altra indefinita FH a lei parallela, si prendano positive le aree, le quali poste fra le AD, BF estendonsi al disopra della AB; dovranno prendersi negative quelle, che al di sotto scorrono fra le AE, BH (IV. *n.*° 5). Fig. 7

II. Intersecandosi le due rette AD, BF con le due AB DF si forma un rettangolo AF, il quale estendesi alla destra della AD, e al disopra della AB. Dunque questo rettangolo sarà tanto rapporto al limite AD, come al limite AB di valor positivo. Ora presa alla sinistra del punto A la porzione AC=AB, e al disotto la porzione AE=AD, e condotte pei punti C, E le indefinite GL, HL parallele rispettivamente alle DE, CB, si hanno i due rettangoli AG, AH, il primo de' quali si estende alla sinistra del limite AD, il secondo sotto del limite AB; dunque sì questo, che quello dovranno rapporto ad AF prendersi negativamente, e scriversi quindi — AG, — AH (IV *n.*° 5).

III. Le GL, HL intersecandosi in L formano un quarto rettangolo AL, il quale si estende alla sinistra della supposta retta AD prolungata al di sotto, mentre alla destra della stessa retta si estende il rettangolo — AH. Dunque, avuto riguardo all'accennato limite DAE, l'area AL si dovrà prendere in un senso opposto a quello, in cui prendesi l'area — AH; ma questa — AH nel nostro caso si

prende negativa (*prec.* II). Dunque l'altra, cioè la AL, dovrà prendersi positiva.

IV. Sia AB $= a$, AD $= b$: cominciando queste rette a computarsi dal punto A, ne verrà $-$ AC $=$ $-a$, $-$ AE $= -b$ (*prec.* II, IV *n.*° 5); e per conseguenza avremo il rettangolo AF $=$ AB $\times$ AD $= a \times b$ $= ab$, l'altro $-$ AG $= -$AC $\times$ AD $= -a \times b = -ab$, il terzo $-$ AH $=$ AB $\times -$AE $= a \times -b = -ab$, ed il quarto AL $= -$ AC $\times -$ AE $= -a \times -b = ab$. Dunque ai due prodotti algebraici ab, $-ab$, corrispondono quattro rettangoli, e corrispondono in modo, che poste a principio le AB, AD positive, se il prodotto positivo ab dipenda dai due fattori a, b, esso indicherà il rettangolo AF; che se lo stesso ab venga formato dai fattori $-a$, $-b$, il rettangolo corrispondente sarà AL: il prodotto poi negativo $-ab$, se sia tale a cagione del fattore $-a$, il rettangolo corrispondente deve prendersi alla sinistra della AD in $-$ AG; e se il medesimo $-ab$ sia negativo dipendentemente dal fattore $-b$, il rettangolo, che gli corrisponde, si deve prendere sotto della AB in $-$ AH.

V. È bensì vero, che AL diventa di segno contrario al segno di $-$ AH non per la stessa ragione, per cui $-$ AH è di segno contrario con AF; giacchè AF, $-$ AH sono fra loro tali per la direzione opposta delle verticali AD, $-$ AE, e gli altri $-$ AH, AL lo sono per l'opposta direzione delle orizzontali AB, $-$ AC. Ciò non ostante siccome lo stato opposto del negativo non è che il positivo, e viceversa; ne segue, che, qualunque siasi la ragione per cui ha luogo nei nostri rettangoli l'indicata contrarietà di stato, sempre potrà dirsi, che, posto il rettangolo AF positivo, e quindi l'altro $-$ AH negativo, si deve il terzo AL prendere nuovamente positivo, perchè avente uno stato, ossia una direzione opposta alla direzione del negativo $-$ AH. Vedesi che esso AL risulta positivo

anche mentre si consideri rapporto al rettangolo $- AG$. La verità di queste conclusioni apparisce eziandio da quanto si è detto nel (*prec.* IV).

VI. Sopra del rettangolo AF supponghiamo formato un parallelepipedo, che abbia una data altezza c, e prendasi questa c positiva: il valore di tale parallelepipedo sarà $a \times b \times c = abc$ (I. *n.*° 7). Si costruisca ora un simile parallelepipedo sopra ciascuno degli altri tre rettangoli $- AG$, $- AH$, AL; il primo di questi sarà evidentemente $= - a \times b \times c = - abc$, il secondo $= a \times - b \times c = - abc$, ed il terzo $= - a \times - b \times c = abc$. Condotta finalmente al di sotto dei soliti rettangoli AF, $- AG$, $- AH$, AL l'accennata altezza, che, a cagione della direzione opposta alla precedente, sarà $= - c$, si formino i corrispondenti quattro parallelepipedi: il primo di essi sarà $= a \times b \times - c = - abc$, il secondo $= - a \times b \times - c = abc$, il terzo $= a \times - b \times - c = abc$, ed il quarto $= - a \times - b \times - c = - abc$.

Da tutto ciò apparisce, 1.° che, otto essendo le combinazioni algebriche, dalle quali possono venire formati i prodotti abc, $- abc$, otto sono parimenti i parallelepipedi, che a' tali prodotti corrispondono; 2.°, che quattro di questi parallelepipedi sono corrispondenti ad abc e quattro a $- abc$; 3.° finalmente che le diverse direzioni delle rette espresse con le a, b, c, indicanti la lunghezza, la larghezza e la profondità del solido, quelle sono, da cui dipende l'esposta variazione de' Parallelepipedi.

9. *Probl.* 4. Date le rette $AB = a$, $CD = b$, Fig. 8 $EF = c$, vogliasi il valore geometrico, che corrisponde al quoto $\frac{ab}{c}$.

Sol. Supposto $\frac{ab}{c} = x$, poichè risulta $ab = cx$,

sarà $c : a :: b : x$; dunque il valore della x altro non essendo che una quarta proporzionale geometrica dopo le tre rette c, a, b, avrò la chiesta soluzione del Problema, trovando con uno dei noti metodi geometrici questa quarta. Disposte perciò le due rette indefinite AX, AZ ad un angolo qualunque in A, prendansi su di esse le porzioni AC $=$ CF $= e$, AH $=$ AB $= a$, AI $=$ ED $= b$, e condotta la GH, si tiri dall' estremo I la retta IK parallela alla GH, e la AK sarà il valore geometrico domandato, onde AK $= \frac{ab}{c}$.

10. *Scol-* 6.° I. Se $\frac{a^2}{c}$ sia la espressione data; trovata dopo le due rette c, a una terza proporzionale geometrica, questa sarà il valore della x.

II. Oltre le rette a, b, c del (*n.° prec.*) siano proposte le altre LM $= d$, NO $= e$, e vogliasi il valore geometrico della espressione $\frac{abd}{ce}$. Riduco perciò questa $\frac{abd}{ce}$ alla forma $\frac{ab}{c} \times \frac{d}{e}$: trovo col mezzo del (*n. prec.*) il valore della $\frac{ab}{c}$, e supposto tale essere la retta AK, denomino f il suo valore; ne verrà $\frac{abd}{ce} = \frac{fd}{e}$, e quindi trovata una quarta proporzionale dopo le NO $= e$, LM $= d$, AK $= f$, sarà essa il valore geometrico domandato.

III. Se la quantità data sia la $\frac{abdg}{ceh}$, riducendosi questa alla $\frac{ab}{c} \times \frac{d}{e} \times \frac{g}{h}$, determino prima $f = \frac{ab}{c}$; poscia cerco il valore di $\frac{fd}{e}$, e chiamato esso k, ritrovo un' altra quarta proporzionale dopo

le h, k, g, e supposta questa m, avremo $m = \frac{kg}{h}$; ma $k = \frac{fd}{e}$: dunque $m = \frac{fdg}{eh}$; e, a cagione di $f = \frac{ab}{c}$, finalmente avremo $m = \frac{abdg}{ceh}$; onde determinando tre quarte proporzionali otterremo il valore di $\frac{abdg}{ceh}$: e così di seguito.

IV. Proposte siano le quantità $\frac{abd}{c}$, $\frac{abde}{c}$, $\frac{abdeg}{c}$, ec. Riducendosi esse alle $\frac{ab}{c} \times d$, $\frac{ab}{c} \times de$, $\frac{ab}{c} deg$, ec., ed essendo pel (*n.° prec.*) $\frac{ab}{c} = f$, avremo sostituendo $\frac{abd}{c} = fd$, $\frac{abde}{c} = fde$, $\frac{abdeg}{c} = fdeg$, ec.: e però la prima espressione $\frac{abd}{c}$ equivalerà ad un rettangolo; la seconda $\frac{abde}{c}$ ad un parallelepipedo (*n.* 6, I. *n.* 7); ma la terza $\frac{abdeg}{c}$, e così le altre successive $\frac{abdegh}{c}$, ec. non potranno avere alcun valore geometrico corrispondente (II. *n.* 7).

11. *Cor.* Poichè i termini a, $\frac{ab}{c}$, $\frac{abd}{ce}$, $\frac{abdg}{ceh}$, ec. sono giusta il (II. *n.°* 176 *Alg.*) di una sola dimensione, gli altri ab, $\frac{abd}{c}$, $\frac{abdg}{ce}$, ec. contengono due dimensioni, e i terzi abd, $\frac{abde}{ce}$, $\frac{abdeg}{ch}$, ec. ne contengono tre; ne segue, che quelle tra le accennate espressioni, le quali hanno algebraicamen-

te (I. 162. *Alg.*) una dimensione sola, rappresentando solamente delle linee (*n.*i 1, 9; II, III. *n.*° 10), rappresentano quantità aventi anche geometricamente una sola dimensione; alle altre espressioni, che hanno algebraicamente due o tre dimensioni corrispondendo delle superficie, o dei solidi (*n.*i 6, I. *n.* 7, IV. *n.*° 10), corrispondono eziandio geometricamente quantità di due, o tre dimensioni. Lo stesso non può dirsi in seguito, perchè quelle tra le esposte espressioni, le quali sono dotate algebraicamente di più di tre dimensioni non rappresentano quantità alcuna geometrica (II. *n.* 7, IV. *n.* 10). Da questo frattanto apparisce che i termini algebraici di una, o due, o tre dimensioni, così appunto si chiamano, perchè possono esprimere quantità geometriche aventi un numero di dimensioni corrispondente. Rapporto poi ai termini, i quali si dicono algebraicamente avere un numero di dimensioni maggiore di tre, si appellano così semplicemente per analogia.

12. *Probl.* 5.° Trovare il luogo geometrico di una frazione razionale, nella quale il denominatore sia composto di più termini, che abbiano lo stesso numero di dimensioni, e nella quale questo numero di dimensioni nel denominatore sia più piccolo del numero di dimensioni nel numeratore.

Sol. Sia per esempio $\frac{abcd}{efg+hik-lmn}$ la frazione data: è chiaro, che avrò sciolto il Problema, ogniqualvolta avrò ridotto il denominatore ad un termine solo, poichè dopo simile riduzione questo caso riducesi ad uno di quelli dei (*n.*i 9, 10). Ora per eseguire tale riduzione, prendo uno qualsivoglia dei termini del divisore, nel nostro caso per esempio il termine efg, e tolta da esso una delle lettere, per esempio la g, colloco in sua vece la x, e suppongo questa x tale, che risulti $efx = efg$

$+ hik - lmn$. Avendosi da ciò $x = g + \frac{hik}{ef} - \frac{lmn}{ef}$, determino col mezzo dei citati (n.i 9, 10), nel caso presente col mezzo del (II. n.° 10) il valore geometrico della $\frac{hik}{ef}$, e quello della $\frac{lmn}{ef}$, li denomino p, q; trovo pel (VII. n.° 5) il valore della espressione $g + p - q$, che chiamo r, e risultando quindi $x = r$, e però $efg + hik - lmn = efr$, la frazione data verà ridotta alla $\frac{abcd}{efr}$. Qualunque altro siasi il numero delle lettere, che formano ciascun termine del denominatore, l' operazione da eseguirsi è sempre la medesima.

13. *Scol.* 7.° I. Se nel rotto dato sia composto nella stessa guisa ancora il numeratore, come per esempio nel rotto $\frac{abc - def}{gi + kl + mn}$: allora trovato, come nel (n.° *prec.*) un numero che dirò r tale, che $kr = gi + kl + mn$, e ridotta così la frazione data alla $\frac{abc - def}{gr}$, o spezzo questa in tante frazioni, quanti sono i termini del numeratore, nel nostro caso nelle due $\frac{abc}{gr} - \frac{def}{gr}$, ed opero su ciascuna di esse giusta i (n.i 9, 10): ovvero operando anche sopra il dividendo, come nel (n.° *prec.*); determino un numero, che chiamerò q, tale che $abq = abc - def$; e avendosi da ciò $\frac{abc - def}{gi + kl + mn} = \frac{abq}{gr}$, ne otterrò tostamente pel (II. n.° 10) il luogo domandato.

II. Se le espressioni date siano le $\frac{abcd - efgh}{gh + ik}$ $+ \frac{lmn}{k}$, $\frac{abcde + fg^3h}{ik} - \frac{a^5 + l^5}{e^2 - d^2}$; ridotte esse giusta i (n.i 12, 13, 9, 10) a forma intiera, e quindi

ad espressioni della forma $ap - eq + lr$, $abs + fgt - a^2u - b^2v$, suppongo la prima di queste quantità $= ar$, la seconda $= aby$, e trovato quindi, come nel (*n.*° 12) il valore della x, e quello della y, il rettangolo espresso dal prodotto ax (*n.*° 6), e il parallelepipedo espresso dal prodotto aby (I. *n.*° 7) saranno rispettivamente i luoghi geometrici delle espressioni supposte. Il metodo stesso è chiaro, che ha sempre luogo in tutti i casi simili ai precedenti.

III. Ancora nei casi ora considerati (*n.*° 12; I, II. *n.*° 13) si vede, che il numero delle dimensioni nel numeratore non deve superare oltre il 3, il numero delle dimensioni nel denominatore; altrimenti la data espressione non rappresenta alcuna quantità geometrica (IV. *n.*° 10).

14. *Teor.* Espresse al solito con le lettere a, b, c, d, ec. tante linee, e formati con esse lettere tanti termini razionali, non possono questi termini, qualunque sia il loro numero, uguagliarsi geometricamente fra di loro; se non se, mentre contengano uno stesso numero di dimensioni (*n.*° 162, II. *n.*° 176 *Alg.*), o, come suol dirsi, mentre siano fra loro *omogenei*.

Dim. Che siano geometricamente impossibili le equazioni $a = bc$, $a = bcd$, $ab = cde$, $a = bcde$, ec. ciò è evidente, poichè per la prima di esse una retta dovrebbe uguagliarsi ad un rettangolo (*n.*° 6), per la equazione seconda una retta uguaglierebbe un solido (I. *n.*° 7), per la terza un rettangolo uguaglierebbe un parallelepipedo, e per la quarta una quantità geometrica, nel nostro caso una retta, sarebbe uguale ad un' espressione, a cui non corrisponde alcun valore geometrico (II. *n.*° 7). Suppongasi ora che si abbiano delle equazioni più composte che pel (*n.*° 99. *Alg.*) supporrò prive di rotti, e tali siano per esempio le

abcd

$$abcd - aefgh = iklmn + efgh - abmnp,$$
$$abcd + e^2fghil = bcde + ef^3g^2mn - fghi,$$
$$abcde - fghilmn = mnp^2q^3r + fgkil.$$

Trasporto nel primo membro di ciascuna di queste tutti i termini, i quali contengono il minimo numero di dimensioni, nel membro secondo gli altri termini tutti, e riduco così tali equazioni alle

$$abcd - efgh = iklmn + aefgh - abmnp,$$
$$abcd - bcde + fghi = ef^3g^2mn - e^2fghil,$$
$$abcde - fghil = fghilmn + mnp^2q^3r.$$

Dividansi esse così ridotte per un prodotto di tante dimensioni, quanto è il numero delle dimensioni diminuito di uno nei termini del primo membro; dividansi quindi, nel nostro caso la prima e la seconda per bcd, la terza per $bcde$, e si otterrà

$$a - \frac{efgh}{bcd} = \frac{iklmn}{bcd} + \frac{aefgh}{bcd} - \frac{abmnp}{bcd},$$

$$a - e + \frac{fghi}{bcd} = \frac{ef^3g^2mn}{bcd} - \frac{e^2fghil}{bcd},$$

$$a - \frac{fghil}{bcde} = \frac{fghilmn}{bcde} + \frac{mnp^2q^3r}{bcde}.$$

Ora in queste ultime equazioni, pel modo, con cui si sono formate, tutti i termini del primo membro sono necessariamente di una sola dimensione, e quelli del membro secondo sono di un numero di dimensioni necessariamente > 1. Dunque pel ($n.^o$ 11) mentre ciascuno dei primi membri esprime una linea ($n.^i$ 2, 3, 4; II, IV. $n.^o$ 5), in ciascuno dei membri secondi i termini non rappresentano che delle superficie, o dei solidi, o delle quantità non geometriche ($n.^i$ 6, 7), e per conseguenza essendo queste ultime Equazioni, come le altre più semplici supposte a principio, geometricamente assurde; tali saranno ancora quelle, da cui esse derivano: ma l' esposto discorso può sempre evidentemente effettuarsi, qualunque sia l' E-

quazione supposta, i cui termini non siano omogenei. Dunque ec.

15. *Scol.* 8.° I. Potrebbe accadere, che nelle Equazioni sovraccennate i termini, i quali hanno lo stesso numero di dimensioni, si uguagliassero fra di loro separatamente dagli altri, come se nella prima delle tre Equazioni poc' anzi supposte si avesse separatamente $abcd = efgh$, $-aefgh = iklmn - abmnp$. In questo caso le Equazioni medesime saranno vere; ma tale accidente è chiaro, che nulla si oppone al precedente Teorema.

II. Non potrà esistere alcun valore geometrico corrispondentemente a quelle frazioni, nelle quali il numero delle dimensioni nel denominatore è uguale, o minore del numero delle dimensioni nel dividendo. Imperciocchè se fosse dato per esempio il rotto $\frac{ab}{cd}$: chiamato il suo valore geometrico x, oppure xy, ovvero xyz, secondochè si volesse, che da lui fosse rappresentata una linea, od una superficie, oppure un solido; ne verrebbe in corrispondenza $ab = cdx$, ovvero $ab = cdxy$, od $ab = cdxyz$; ma ciascuna di queste Equazioni pel (*n.*° 14) è geometricamente impossibile. Dunque sarà ancora impossibile, che esista alcun valore geometrico espresso dalla frazione $\frac{ab}{cd}$. Lo stesso discorso vedesi, che ha sempre luogo in tutti i rotti, che sonosi accennati nel presente paragrafo. Dunque ec.

III. Se venga proposta una frazione, la quale abbia il numeratore formato di uno, o di più termini fra loro omogenei, ed il denominatore composto di più termini non fra loro omogenei, come, per esempio la $\frac{abcde + fghi^{a}}{klm + np + g}$; neppur questa potrà rappresentare alcun valore geometrico, e ciò si dimostra come nel (*prec.* II). Imperocchè, posta es-

sa $= x$, ovvero $= xy$, ovvero $= xyz$; ne vengono in corrispondenza le equazioni
$abcde + fghi^2 = klmx + npx + qx$,
$abcde + fghi^2 = klmxy + npxy + qxy$,
$abcde + fghi^2 = klmxyz + npxyz + qxyz$,
Equazioni tutte e tre geometricamente impossibili (*n.*° 14).

IV. Suppongasi, che nella frazione data non siano fra loro omogenei nè i termini del numeratore, nè quelli del divisore. In questa ipotesi si verificherà bensì in generale quanto si è asserito rapporto alle frazioni supposte nei (*prec.*[i] II, III); ma però possono accadere dei casi particolari, nei quali la frazione può in realtà rappresentare un valore geometrico. Abbiansi le frazioni $\frac{abc + de}{fg + h}$, $\frac{abcde + fghi + klm}{npq + rs + t}$; poichè il rotto $\frac{abc}{fg}$ non è che di una dimensione, e l' altro $\frac{abcde}{npq}$ è di due; ne segue, che, se le due frazioni supposte esprimono quantità geometriche, la prima non può esprimere, che una linea, la seconda, che una superficie: Posta pertanto quella $= x$, e questa $= xy$, ne verranno le due equazioni
$abc + de = fgx + hx$,
$abcde + fghi + klm = npqxy + rsxy + txy$;
ora tali Equazioni pel dimostrato nel (*n.*° 14) sono in generale geometricamente impossibili: dunque impossibile è ancora in generale, che le frazioni ora proposte esprimano valori geometrici: ma se a cagione del valore particolare delle a, b, c, ec. su di simili Equazioni ha luogo l' accidente considerato nel (*prec.* I); allora esse pel citato (*prec.* I) si verificheranno, e in corrispondenza la prima delle frazioni supposte rappresenterà realmente una linea, la seconda una superficie. Ponghiamo difatti rap-

porto alla prima, che sia $abc = fgx$, $de = hx$; venendone $x = \frac{abc}{fg} = \frac{de}{h}$, le due frazioni $\frac{abc}{fg}$, $\frac{de}{h}$ tra loro uguali esprimeranno una stessa retta, e questa $= x$; ma x rappresenta il valore del dato rotto $\frac{abc + de}{fg + h}$: dunque tal rotto esprimerà realmente una linea, ed essa sarà la stessa, che quella delle frazioni $\frac{abc}{fg}$, $\frac{de}{h}$ tra loro uguali. In questo caso avendosi $abc = \frac{defg}{h}$ risulterà $\frac{abc + de}{fg + h} = \frac{defg + hde}{hfg + h^2}$ $= \frac{de}{h} \times \frac{fg + h}{fg + h} = \frac{de}{h}$.

Rapporto alla precedente Equazione seconda siano le a, b, c, d, ec. tali, che $abcde = npqxy$, $fghi = rsxy$, $klm = txy$. Avendosi quindi $xy = \frac{abcde}{npq} = \frac{fghi}{rs} = \frac{klm}{t}$, il rettangolo espresso da ciascuna di queste ultime tre frazioni fra loro uguali sarà il valore della data $\frac{abcde + fghi + klm}{npq + rs + t}$; ed essendo in questa ipotesi $abcde = \frac{klmnpq}{t}$, $fghi = \frac{klmrs}{t}$, avremo

$$\frac{abcde + fghi + klm}{npq + rs + t} = \frac{klmnpq + klmrs + klmt}{npqt + rst + t^2} =$$
$$\frac{klm}{t} \times \frac{npq + rs + t}{npq + rs + t} = \frac{klm}{t}.$$

Se la frazione proposta sia la $\frac{abcde + f^3gh + ikl^2}{m^2 + n}$, come precedentemente si vedrà, che essa esprime un solido, mentre sia $\frac{abcde + f^3gh}{m^2} = \frac{ikl^2}{n}$, riducen-

dosi essa stessa in tal caso alla $\frac{ikl^2m^2 + ikl^2n}{m^2n + n^2} = \frac{ikl^2}{n} \times \frac{m^2 + n}{m^2 + n} = \frac{ikl^2}{n}$. In caso diverso a simile frazione non corrisponde alcun valore geometrico.

Per riconoscere, quando nei rotti ora indicati, e negli altri a loro simili ha luogo l'esposto accidente, bisogna in primo luogo osservare, se i termini del dividendo hanno un numero 1, oppur 2, oppur 3 di dimensioni, oltre quelle, che esistono in tanti termini corrispondenti del divisore; e in caso che sì, bisogna in secondo luogo spezzare la frazione proposta in tante frazioni dello stesso numero di dimensioni, e ciò fatto osservare se in esse il numeratore della frazione avente i termini più piccoli contiensi in ciascuno degli altri numeratori tante volte, quante il suo donominatore si contiene nel denominatore corrispondente. Se queste cose succedano: da quanto abbiam detto apparisce, che il rotto proposto ha in realtà un valore geometrico, ed apparisce, che la diversità delle dimensioni, tanto nei termini del numeratore, come in quelli del denominatore non da altro in questo caso dipende, se non se da un moltiplicatore comune ai due termini della frazione ed estraneo al valor vero della frazione medesima. Così dirò che la precedente $\frac{abcde + f^3gh + ikl^2}{m^2 + n}$ esprime realmente un solido, perchè veggo che tanto le dimensioni de'due termini $abcde+f^3gh$ nel dividendo superano le dimensioni del termine m^2 nel divisore di 3, come superano di 3 le dimensioni del termine terzo ikl^2 la dimensione dell'altro n, e veggo insieme per la ipotesi fatta, che ikl^2 si contiene in $abcde+f^3gh$ tante volte, quante n in m^2. Essa frazione poi altro non è che la $\frac{ikl^2}{n}$, moltipli-

cati i suoi termini pel fattor comune $m^a + n$.

V. Che se finalmente siano nella frazione proposta omogenei fra loro i termini del denominatore, e non tali quelli del numeratore come per esempio nella $\frac{abcde + fghi + klm}{pq + rs}$: allora, spezzata essa frazione in tante frazioni, quanti sono i termini del dividendo, se queste ultime esprimono quantità geometriche, il loro aggregato costituirà il valore geometrico della frazione data. Nel posto esempio, spezzandosi il dato rotto negli $\frac{abcde}{pq+rs}$, $\frac{fghi}{pq+rs}$, $\frac{klm}{pq+rs}$, esso rappresenterà il cumulo di un solido, d' una superficie, e di una linea.

16. *Scol.* 9.° Finora abbiamo tacitamente supposto, che nel calcolo non si sia giammai introdotta quella retta, che nel (*n.*° 1) fu denominata 1, nè le altre di valore determinato, ed espresse con i numeri 2, 3, 4, ec. Ora se gli accennati numeri, o l' unità si siano introdotti, alterandosi quindi apparentemente le dimensioni, potrebbero le espressioni algebriche, e le Equazioni, che ne risultano, per quanto si è detto di sopra, apparire assurde, e realmente non essere tali. Supposto per esempio, che la retta a sia una quarta proporzionale dopo le tre 1, b, c, avremo $a \times 1 = bc$, e però $a = bc$. In quest' ultima Equazione il termine a apparisce di una dimensione, mentre l' altro bc è di due, ed essa per conseguenza comparisce assurda (*n.*° 14), ma vedesi agevolmente non essere questa che una semplice apparenza, poichè in realtà essendo il primo termine $a \times 1$, esso non è di una, ma di due dimensioni. Così la frazione $\frac{a}{b}$, mentre provenga dalla precedente $a = bc$, esprimerà un vero valore geometrico, cioè la retta c, quantunque apparente-

mente si presenti di nessuna dimensione: ho detto apparentemente, perchè avendosi propriamente $c = \frac{a \times 1}{b}$, ove 1 esprime una retta, la espressione $\frac{a}{b} = \frac{a \times 1}{b}$ in realtà è d'una dimensione.

17. *Cor.* I. Da quanto si è detto fin quì deducesi agevolmente, che, se siamo certi di non avere introdotta nel calcolo alcuna delle rette 1, 2, 3, ec. (*n.*° 1), ma di avervi introdotte soltanto le espresse con le lettere, e se frattanto veggiamo risultare un' Equazione con termini di dimensioni disuguali, nella quale non ha luogo l'accidente considerato nel (I. *n.*° 15); dovremo concludere di avere errato nel calcolo, quando mai il Problema stesso non chiedesse già cose assurde, e converrà rifarlo.

II. Che se, eseguito un giusto calcolo, ed essendo geometricamente possibile il richiesto dal Problema, risulta un' Equazione non soggetta all' accidente del (I. *n.*° 15), nella quale, tolti i rotti, i termini risultano non omogenei fra di loro; diremo allora essersi introdotta nel calcolo la retta 1, o qualcuna delle altre 2, 3, ec. e questa 1 deve nei termini aventi minor numero di dimensioni compire le dimensioni medesime. Così se sia risultata l'equazione $abx = cd + e$, nella quale le a, b, ec. x siano tante rette, essa deve considerarsi, siccome la $abx = cd \times 1 + e \times 1 \times 1$, cioè si deve considerare, che per essa il parallelepipedo abx deve uguagliare l'altro, che ha per base cd, e per altezza la retta 1, più un altro parallelepipedo, la cui base sia il quadrato della retta 1, e l'altezza la retta e.

III. Avendosi $1 \times 1 = 1$, $1 \times 1 \times 1 = 1$, ne segue, che la stessa cifra 1 esprime tanto la retta presa per unità (*n.*° 1), come il suo quadrato, ed il suo cubo. Per distinguere questi tre casi, cioè per riconoscere a qual genere di unità, se lineare,

se quadrata, o cubica debba riferirsi nei diversi termini di un' Equazione la cifra 1, si osservi a qual grado debba essa 1 innalzarsi, onde rendere in tutti i termini della Equazione data le dimensioni uguali, e questo grado determinerà il genere di unità domandato. Per tal modo nella Equazione precedente $abx = cd + e$ la unità, che moltiplica bc è lineare, ed è quadrata quella che moltiplica e; nella Equazione $1 + b^3 = abc$, la cifra 1 esprime l'unità cubica.

18. *Probl.* 6. Proposta un' Equazione algebraica determinata di 1.° grado, trovare il valore geometrico, che corrisponde al valore dell' incognita, ossia costruirla.

Sol. Per iscioglier questo Problema è chiaro, che non dovremo se non che risolvere giusta i metodi algebraici l' equazione supposta, e determinata così l' espressione algebraica razionale, a cui l' incognita si uguaglia, non dovremo che applicare all' espressione medesima le regole esposte nei precedenti ($n.^i$ 2, ec.). Sia per esempio $abx - c^3 + \frac{a^3b^2}{c^2} = cdx + bc^2$ l' equazione data. Trovato da questa con i metodi dell' Algebra $x = \frac{c^3 + bc^2 - \frac{a^3b^2}{c^2}}{ab - cd}$, determino prima pel (III. $n.^o$ 10) la retta dell' espressione $\frac{a^3}{c^2}$, onde, chiamata essa m si abbia $\frac{a^3b^2}{c^2} = b^2m$, e quindi $x = \frac{c^3 + bc^2 - b^2m}{ab - cd}$: riduco giusta i ($n.^o$ 12, I. $n.^o$ 13) il denominatore $ab - cd$ all' espressione cn, e il numeratore $c^3 + bc^2 - b^2m$ alla cpq. Avendosi da ciò $x = \frac{pq}{n}$, la quarta proporzionale dopo le n, p, q sarà il valore della x domandato.

CAPO II.

Della soluzione dei Problemi geometrici determinati di 1.° grado

19. *Scol.* 1.° I. Prendendo ora a considerare il problema del (II. *n.*° 1.); poichè abbiamo ritrovato $x = \frac{b^2}{a-2b}$, cerchiamo coi metodi stabiliti la retta che corrisponde all' espressione $\frac{b^2}{a-2b}$, e questa scioglierà il Problema. Avendosi perciò nella (Fig. 2) per la supposizione $AB = a$, $CB = b$, ripetuta nella (Fig. 9) questa retta $AB = a$, conduco l'altra $MN = AB = a$, e tolgo da questa giusta il (*n.*° 4.) la porzione $PN = 2b$; sarà $MP = MN - PN = a - 2b$; poste ora ad un angolo qualunque le due rette indefinite QR, QS, prendo su di loro $QF = MP = a - 2b$, $QG = CB = b$, $QH = CB = b$, e condotta la FG, tiro da H la HL parallela alla FG: poichè $QF : QG :: QH : QL$, avremo $QL = \frac{b^2}{a-2b}$, onde $QL = x$. Aggiungo pertanto alla data AB la porzione BD = QL, e questo pel (II. *n.*° 1) sarà il prolungamento richiesto dal Problema, onde sarà $CD^2 = AD \times BD$. Fig. 9

II. Abbiamo bensì per tal modo ottenuta la costruzione della Equazione $x = \frac{b^2}{a-2b}$, e quindi la soluzione dell'Problema dato, ma questa non è la via propriamente usata dai Matematici: essi con metodo più semplice, e più elegante vogliono piut-

tosto, che su la Figura proposta, cioè sulla data retta si costruisca l' Equazione risultata. Tirata perciò nuovamente la $AB = a$ nella (Fig. 10), e tagliata la $BC = b$, prolungo indefinitamente questa retta verso E, e cercando di tagliare da essa una porzione $BD = \frac{b^2}{a - 2b}$, che sciolga per conseguenza il Problema, prendo verso A la $CP = b$, onde a cagione di $BP = 2b$ ottengasi $AP = a - 2b$. Innalzo ora dai due punti C, B, le CQ, BR perpendicolari, e tali, che $CP = AP = a - 2b$, $BR = BC = b$, e tirata la BQ dal punto R conduco la parallela RD, questa taglierà la indefinita BE nel punto richiesto, ossia per modo che la porzione tagliata $BD = \frac{b^2}{a - 2b}$. Difatti essendo per la somiglianza de' triangoli CQB, BRD; $CQ : CB :: BR : BD$, sarà $a - 2b : b :: b : BD$, e però $BD = \frac{b^2}{a - 2b}$ come si richiedeva.

Fig. 10

Proponiamoci altri Problemi, od esempj.

Fig. 11

20. *Esem.* 2.° Dato un triangolo ABC, inscrivere al medesimo un quadrato, il quale poggi sulla sua base AC.

Sol. Si supponga il Problema già sciolto, ed MQRN rappresenti il quadrato richiesto; abbasso da B la perpendicolare BD, e poichè il triangolo è cognito, suppongo la sua base $AC = a$, e l'altezza $BD = b$. Restando la BD tagliata dal lato MN del quadrato, è chiaro che avrò sciolto il Problema, ogniqualvolta avrò determinata la lunghezza della DP; poichè inallora pel punto P conducendo la MN parallela alla AC, potrò formare il quadrato, dai due punti d' incontro M, N abbassando le perpendicolari MQ, NR. Chiamo pertanto x la retta da determinarsi DP, e avendosi quindi $BP = BD - DP = b - x$, e per la somiglianza dei triangoli BAC, BMN essendo $BD : AC :: BP : MN$, ne verrà, sostituendo

$b:a::b-x:x$, giacchè per essere MNRQ un quadrato, abbiamo $MN=MQ=DP=x$, e quindi avremo $bx=ab-ax$, d' onde si ricava $x=\frac{ab}{a+b}$.

Giacchè da questa Equazione si ottiene $a+b:a::b:x$; affine di costruirla sulla figura medesima, che è stata supposta (II. *n.*° *prec.*), supposto che essa sia il triangolo ABC della (Fig. 12) dal punto D conducasi con un angolo, qualunque la DG; si tagli in essa la $DF=BD=b$, la $FG=AC=a$, onde sia $DG=a+b$, e si prolunghi la DC in H per modo che $DH=AC=a$. Ciò fatto, e congiunti con la GH i punti G, H, tirisi da F la FE parallela alla GH, e fatto centro in D col raggio $=$ DE si descriva un archetto in P, e questo, determinando il valore $DP=x$, scioglierà il Problema. Difatti per la somiglianza de' triangoli DEF, DHG, essendo $DG:DH::DF:DE::DF:DP$, poichè $DE=DP$ per la costruzione, avremo $DP=\frac{DF\times DH}{DG}$, e sostituendo i valori corrispondenti $DP=\frac{ab}{a+b}$. Dunque, ec.

Fig. 12

21. *Scol.* 2.° I. Rappresenti nuovamente la (Fig. 13) il dato triangolo ABC (*n.*° *prec.*), in cui $AC=a$, $BD=b$, e si prolunghi indefinitamente la base AC; prendasi su di questa $DE=AC=a$, $EF=BD=b$, e condotta la FB dal punto E si tiri la EP parallela alla FB. Ciò fatto per la somiglianza dei due triangoli PDF, PDE, abbiamo $DF:DB::DE:DP$; ma $DF=a+b$, $DB=b$ $DE=a$; dunque sostituendo sarà $a+b:b::a:DP$, e quindi $DP=\frac{ab}{a+b}$. Ora $\frac{ab}{a+b}$ non è che il valore della x nella Equazione del (*n.*° *prec.*). Dunque abbiamo così nuovamente la determinazione del punto P, di quello cioè, che somministra la soluzione del Problema precedente.

Fig. 13

Da questo apparisce che una medesima Equazione può venire costruita in maniere diverse. Ora paragonando fra loro nel caso presente le due costruzioni ottenute, vedesi, che la seconda è più semplice, e più elegante della prima: questa seconda adunque dovrebbe all' altra anteporsi, giacchè, quando si possa, vogliono i Matematici, che si operi con la maggiore semplicità, ed eleganza, ma dobbiamo confessare non esssere sempre così facile il soddisfarvi.

II. Nella soluzione di un Problema Geometrico non una sola, ma diverse rette vengono di sovente a determinarsi: così nell' Esempio precedente trovato il valore della DP, e formato il quadrato MR richiesto, si vengono a determinare le BP, BM, BN, ec.: ora tutte queste linee hanno per la natura delle figure geometriche certi rapporti fra loro, in conseguenza de' quali, conosciutane una, si può determinare il valore di ciascuna delle altre. Dunque il valore della stessa DP, e quindi la soluzione del Problema proposto si sarebbe ottenuta eziandio, se invece di essa DP, si fosse presa per incognita un' altra qualsivoglia delle rette accennate, per esempio la CR. Posta difatti questa CR $= y$, e posta la CD $= c$, poichè essendo cognito il triangolo ABC, anche essa CD deve essere cognita, avremo $c : b :: y : \text{RN} = \frac{by}{c}$, ed a cagione di MN $=$ PD $=$ RN, essendo $b - \frac{by}{c} : \frac{by}{c} :: b : a$, si otterrà $y = \frac{ac}{a+b}$. Dunque nello scioglimento de' Problemi geometrici accaderà il più delle volte, che si possa prendere per incognita tanto una certa retta, come un' altra: giova però il riflettere, che non tutte queste rette conducono sempre ad Equazioni, ed a costruzioni egualmente semplici. Dipende da

un' esatta cognizione delle proprietà geometriche; da un esercizio continuato, e dall' ingegno dell' Analista il sapere fra tutte scegliere per incognita quella linea, per mezzo della quale ottienesi la soluzione meno complicata, e più elegante.

22. *Esem.* 3.° Dato il semicircolo AMB determinare sopra il suo diametro AB prolungato un punto T tale, che condotta da esso la tangente TM, e abbassata dal punto di contatto M la perpendicolare MP, risulti PT : PB : : PA : PC. Fig. 14

Sol. Costruita la Figura come nell' enunciato del Problema, si conduca al punto di contatto M il raggio CM, e si ponga esso raggio $= a$, e la CT $= x$. Per essere il triangolo CMT rettangolo in M, e la MP perpendicolare alla CT, si ha CT : CM : : CM : CP; dunque $CP = \frac{a^2}{x}$; ma per la condizione del Quesito abbiamo PT : PB : : PA : PC, e però a cagione di $PT = x - \frac{a^2}{x}$, $PB = a - \frac{a^2}{x}$, $PA = a + \frac{a^2}{x}$ abbiamo $x - \frac{a^2}{x} : a - \frac{a^2}{x} : : a + \frac{a^2}{x} : \frac{a^2}{x}$. Dunque l' Equazione, da cui dipende il valore della a, e quindi la soluzione del Problema, sarà la $\left(x - \frac{a^2}{x}\right) \frac{a^2}{x} = \left(a - \frac{a^2}{x}\right) \left(a + \frac{a^2}{x}\right)$, ossia la $a^2 - \frac{a^4}{x^2} = a^2 - \frac{a^4}{x^2}$. Ora questa risultataci è un Equazione identica, e però vera per se medesima indipendentemente dal valore della x: che cosa adunque ricaviamo da ciò per la soluzione del Problema proposto? Per determinarlo, si osservi, che verificandosi l' Equazione ottenuta indipendentemente dalla x, e però qualunque valore si attribuisca alla x medesima, il Problema rimarrà sempre sciolto, di qualunque lunghezza si prenda la CT, ossia in qualunque

luogo del diametro prolungato prendasi il punto T. Tutti pertanto i punti del prolungamento indicato scioglieranno il Problema, ed esso per conseguenza dovrà piuttosto dirsi un Teorema: condotta cioè da un punto qualsivoglia del prolungamento alla circonferenza AMB la tangente MT, e l'ordinata MP, dovrà essere sempre PT : PB : : PA : PC.

Ogniqualvolta dato un Problema, e fatte sulle Equazioni corrispondenti le riduzioni dovute, si giunge infine ad una, o a più Eqnazioni tutte identiche; dobbiamo, come nel caso precedente, concludere, che il proposto non è già un Problema, ma bensì un Teorema, poichè tutti i punti, che si hanno in considerazione vi soddisfanno.

Fig. 15 23. *Esem.* 4.° Dato nella (Fig. 15) il Circolo ABD, formare entro del medesimo altri due Circoli, i quali si tocchino scambievolmente, e tocchino il Circolo grande, e siano tali che, unendo con tre rette i tre centri, si formi un triangolo simile ad un dato MON.

Sol. Posto $MN = a$, $MO = b$, $NO = c$, e il raggio del Circolo dato $= d$, rappresentino ARS, BRT i due Circoli richiesti, de' quali P, Q siano i centri, e supponiamo, che formisi il triangolo CPQ simile al dato MNO; ciò posto affine di determinare il punto P centro del circolo ARS, conduciamo da C pel centro P il raggio CA, e facciamo $CP = x$. Poichè, se dal punto di contatto A s' innalza una retta perpendicolare alla AT tangente evidentemente comune ad amendue i circoli ADB, ARS, questa perpendicolare, pei principj di Geometria, deve passare per amendue i centri P, C, ne viene che dessa si combacerà con il supposto raggio CA, e quindi tal raggio porterà il suo estremo al punto di contatto A. Essendo adunque $CA = d$, $CP = x$, avremo $PA = d - x =$ al raggio del Circolo ARS. Ora per la supposta somiglianza si ha MO:MN::CP: PQ, ossia $b : a : : x : PQ$; dunque sarà $PQ = \frac{ax}{b}$, e

giacchè PR$=$PA$=d-x$, e QR$=$QP$-$CR, passando la PQ pel punto di contatto R per la ragione istessa, che abbiamo ora accennata; sarà QR $= \frac{ax}{b} - d + x = \frac{ax+bx-bd}{b}$, ma CQ$=CB-QB=$CB $-$QR, essendo QR$=$QB, dunque sostituendo avremo CQ $= d - \frac{ax+bx-bd}{b} = \frac{2bd-ax-bx}{b}$. Ora per la somiglianza supposta abbiamo nuovamente MN : NO :: PQ : QC, e però MN$\times$QC$=$NO$\times$PQ; dunque sostituendo sarà $a \times \frac{2bd-ax-bx}{b} = c \times \frac{ax}{b}$, e riducendo questa Equazione col moltiplicarla tutta per b e dividerla per a, otterremo $2bd - ax - bx = cx$, da cui ricavasi $x = \frac{2bd}{a+b+c}$, e quindi $a+b+c : 2b :: d : x$. Ritrovando pertanto una quarta proporzionale dopo $a+b+c$, $2b$, d questa esprimerà il valore della x.

Affine di ciò fare, e quindi di costruire l'Equazione; condotto nel dato circolo ABD un raggio CA, su del quale si voglia che esista il centro di uno dei circoli richiesti, tiro ad un angolo qualunque la retta CE tale che sia $=$MN$+$MO$+$NO$=$ $a+b+c$, prolungo quindi CA fino in F, cosicchè CF$=2b$, e congiunti con la EF i punti E, F, da D tiro una DP parallela alla EF, e questa taglierà la CA nel punto richiesto. Difatti avendosi CE : CF :: CD : CP, sarà $a+b+c : 2b :: d :$ CP, e quindi CP $= \frac{2bd}{a+b+c} = x$. Fig. 16

Determinato così il punto P, faccio centro in P, e col raggio CA descrivo il circolo ARS: quindi sopra CP formo il triangolo PCQ simile al triangolo MON, ponendo PC corrispondente ad MO, e ritrovato in tal guisa il punto Q, facendo centro su

d' esso, col raggio QR descrivo l'altro circolo BRT, ed avrò così sciolto il Problema.

Potea nel Problema richiedersi che i due circoli da descriversi ARS, BRT fossero fuori del dato ABD, la soluzione in questo caso sarebbe stata somigliante alla precedente, risultando però pel valore della incognita $x = \frac{2bd}{b+c-a}$.

Fig. 17 24. *Esem.* 5.° Dati i due circoli CEG, HFL, condurre una retta DE tangente comune ad ambedue.

Sol. I. Congiunti i loro centri A, B con la AB prolungo indefinitamente questa retta, poichè i due circoli sono dati in tutto, saranno cogniti i loro raggi, e sarà cognita la distanza fra i loro centri: pongo pertanto $AE = a$, $BF = b$, $AB = c$. Rappresenti EF la tangente richiesta, e si prolunghi questa fino ad incontrare la AB, il che succederà in D: la determinazione di questo punto D, ossia della lunghezza BD è chiaro che scioglierà il Problema, poichè se da esso punto di già ritrovato condurrò al circolo HLF, col metodo già cognito dalla Geometria elementare, la tangente DF, questa prolungata, è evidente che sarà tangente anche all'altro CGE. Si ponga adunque $AD = x$, e tirinsi ai punti di contatto E, F i raggi AE, BF. Poichè questi sono perpendicolari alla ED, e quindi sono fra loro simili i due triangoli AED, BFD, avremo $AE : BF :: AD : DB$, e però $AE \times BD = BF \times AD$. Ora già abbiamo $AB = c$, $AE = a$, $BF = b$, $BD = x$, e si ha $BD = AD - AB = x - c$. Dunque, sostituendo, otterremo $ax - ac = bx$, da cui ricavasi $x = \frac{ac}{a-b}$, e quindi $a-b : c :: a : x$.

Fig. 18 Cercando ora la costruzione, siano nella (Fig. 18) i due Circoli dati, e prolungata la AB, si conducano ad un angolo qualunque con la AD i due raggi

gi AG, BH, purchè fra loro paralleli, e pei due estremi G, H di questi tirata la GHD essa ci determinerà in D il punto cercato, ossia taglierà la $BD = x$. Condotta difatti da H la HI parallela alla AB, avremo i due triangoli IGH, GAD simili fra loro, onde $IG : IH :: AG : AD$; ma $IG = AG - HB = a - b$, $IH = AB = c$; dunque sarà $a - b : c :: a : BD$, e quindi $BD = x$.

II. Ma non una sola tangente può condursi ai supposti due circoli; è chiaro che oltre la DE tangente i medesimi nella parte loro superiore, può un'altra condursene che li tocchi nella parte loro inferiore, e se ne possono condurre altre due, una delle quali tocchi il primo circolo al disopra, e il secondo al disotto, e l'altra tocchi il secondo al disopra, ed al disotto il primo. Poichè queste quattro tangenti sono fra loro a due a due eguali, e similmente poste; basterà per la loro determinazione ritrovare sulla AD due soli punti, D, d, e conducendo da ciascuno di questi ad uno dei circoli una tangente di sopra, ed una al disotto, avremo così tutte e quattro le tangenti, che si ricercano. Abbiamo di già ritrovato il punto D; affine di ottenere l'altro d, fatto $Ad = x$, si conduca nella (Fig. 17)) la tangente ef, e tirati i raggi Ae, Bf, avremo $Ae : Bf :: Ad : dB$, e però $a : b :: x : c - x$, onde Fig. 17

$$x = \frac{ac}{a+b}, \text{ e quindi } a + b : a :: c : x.$$

Per determinare questo valore della x, prolungato nella (Fig. 18) il raggio BH fino in L, uniscansi i punti G, L con la GL, e il punto d, ove questa retta taglia AB, sarà il cercato; poichè avendosi $AG : BL :: Ad : dB$, sommando sarà $AG + BL : AG :: AB : Ad$, ossia $a + b : a :: c : Ad$, e per conseguenza $Ad = x$. Fig. 18

25. *Esem.* 6.° Da un punto preso sopra un lato di un rettangolo condurre una retta, la quale divida l'area del rettangolo medesimo in media,

ed estrema ragione aritmetica, cioè per modo che una delle parti del rettangolo diviso, per esempio la destra differisca dalla sinistra di tanto, di quanto la sinistra differisce dall' area del rettangolo intero.

Fig. 19 *Sol.* I. Sia BD il rettangolo dato, e sopra del lato AD sia E il dato punto. Supposto, che la EM sia la retta che scioglie il Quesito, dovranno le tre Aree EDM, EMCBA, BD, per la condizione del Problema essere in continua proporzione aritmetica, e però avremo EDM + BD = 2EMCBA (II. *n.*° 127 *Alg.*). Ciò essendo, si ponga $AD = BC = a$, $AB = DC = b$, $ED = FC = c$, $DM = x$, conducasi la EF parallela alla AB, e risultando il rettangolo $BD = ab$, il triangolo $EDM = \frac{cx}{2}$, e la figura EMCBA=EMCF+EFBA $= \frac{(2b-x)c}{2} + (a-c)b = \frac{2ab-cx}{2}$ avremo $\frac{cx}{2} + ab = 2ab - cx$, e però $x = \frac{2ab}{3c}$.

Per costruire l' Equazione ottenuta, si replichi

Fig. 20 nella (Fig. 20) il dato rettangolo BD, prolungato quindi in esso il lato AD alla sinistra, finchè risulti $EF = 2DE = 2c$, si seghi su di questo prolungamento la porzione $AG = AD = a$; e condotta la FC si tiri dal punto G la GM a lei parallela: il punto M così determinato quello sarà che scioglie il Problema. Difatti avendosi $EF = x$, ed $AG = a$, sarà $DF = 3c$, $DG = 2a$, e per conseguenza $3c : b :: 2a : x = \frac{2ab}{3c}$.

II. Finora ho tacitamente supposto, che il punto M, in cui la retta EM incontra il lato DC, esista non al disotto del punto C; e però ho tacitamente supposta la retta $DE = c$ tale, che il valore della x, cioè $\frac{2ab}{3c}$ sia non $> b$, e quindi che sia c

non $< \frac{2a}{3}$. Abbiasi ora $c < \frac{2a}{3}$, e cada per conseguenza il punto d'incontro della retta, che vuolsi condurre dal punto E, con la DC al disotto del punto C, per esempio in M'. In questo caso il precedente valore della x non potrà somministrare la soluzione del Problema: imperciocchè, mentre abbiamo $DM' = x$, le tre aree, che dovrebbero essere in continua proporzione aritmetica, sarebbero le DCNE, ENBA, BD, e nè la prima, nè la seconda di queste uguagliano le espressioni algebraiche, che hanno somministrata la soluzione del Problema nel caso precedente, cioè le espressioni $\frac{cx}{2}$, $\left(\frac{2b-x}{2}\right)c$ $+ (a-c)b$, poichè si ha $\frac{cx}{2} = EM'D$, e $\frac{(2b-x)c}{2} + (a-c)b$ $= a-c)b + \frac{bc}{2} - \frac{(x-b)c}{2} = AEFB + ECD - EGD$ (presa essendosi la $DG = GM'$, ed essendosi condotte le rette EC, EG) = AEFB + GEC, valori geometrici amendue ben diversi dagli accennati DCNE, ENBA. Per iscioglere adunque il quesito in questo secondo caso, prendo per incognita la BN, e la denomino y. Avendosi $CN = a - y$, onde l'area $DCNE = \frac{(c+a-y)b}{2}$, e l'area $ENBA =$ $\frac{(a-c+y)b}{2}$, per la condizione del Problema sarà $\frac{(c+a-y)b}{2} + ab = (a - c + y)b$, e per conseguenza $y = \frac{a}{3} + c$. Per determinare il valore della y prendo, giusta i Principj Geometrici la porzione BH terza parte della BC, aggiungo ad essa la porzione $HN = ED$, e risultando $BN = \frac{a}{3} + c = y$

Fig. 19

Fig. 21

conduco la retta EN, ed avrò così risolto il Problema.

È chiaro, dover quivi essere c non $> \frac{2a}{3}$. Imperciocchè se lo fosse; allora la retta $=ED=c$, che si aggiunge alla $BH = \frac{a}{3}$, oltrepasserebbe il punto C, e supposto che giungesse in N', onde $BN'=y$, la retta EN' taglierebbe in un punto M il lato DC, per cui EDM, EMCBA sarebbero le due parti del rettangolo, che sono chieste dal Problema, e frattanto nè la prima di esse è $= \frac{(c+a-y)b}{2}$, nè la seconda $= \frac{(a-c+y)b}{2}$.

Se si avesse voluto anche in questo secondo Fig. 19 caso ritenere per incognita la $DM'=x$ poichè da tale ipotesi si ha $CN = \frac{(x-b)c}{x}$, $BN = \frac{(a-c)x+bc}{x}$, sarebbesi ottenuta l'Equazione $\left(\frac{2cx-bc}{2x}\right) b + ab = \left(\frac{2(a-c)x+bc}{x}\right) b$, e però la $x = \frac{3bc}{2(3c-a)}$. Ma essendo questo valore della x più complicato del precedente della y, ed esigendo quindi per la sua determinazione geometrica una costruzione meno semplice, gioverà per la più elegante soluzione del Problema nel secondo caso anteporre alla incognita DM' l'altra BN.

Vedesi essere questo un Quesito, la cui soluzione completa viene determinata dai due valori $x = \frac{2ab}{3c}$ (*prec.* I), $y = \frac{a}{3} + c$ (*prec.* II), il primo de' quali deve prendersi ogniqualvolta si abbia $c > \frac{2a}{3}$, il secondo mentre $c < \frac{2a}{3}$, e quando $c =$

$\frac{2a}{3}$, tanto l'uno, come l'altro di questi valori ci darà la soluzione del Problema, cadendo allora il punto M della EM, (Fig. 20), e il punto N della EN (Fig. 21) in C, onde queste rette EM, EN vanno, nella supposizione di $c = \frac{2a}{3}$, a coincidere nella stessa EC.

26. *Esem.* 7.° Supposto, che in un Bigliardo HIKL siano le palle A, B perfettamente elastiche, che si prescinda da qualunque attrito, e da qualunque mezzo resistente, e supposto che tali palle si trovino in due determinati luoghi A, B del Bigliardo medesimo, dimandasi a qual punto M della sponda HI debba dirigersi la palla A, 1.° acciocchè, percossa quella, si porti quindi ad urtare, come nella (Fig. 22), la palla B; 2.° oppure acciocchè dalla HI vada ad urtare, come nella (Fig. 23), la sponda IK, e poscia la palla B; 3.° ovvero affinchè incontri questa palla B dopo avere urtate successivamente, come nella (Fig. 24), le tre sponde HI, IK, KL; 4.° oppure dopo avere urtate le quattro HI, IK, KL, LK (Fig. 25); ovvero dopo le cinque HI, IH, KL, LH, HI (Fig. 26), ec.

Fig. 22 ec. 26

Sol. Condotta dal punto A, ove esiste la prima palla, alla sponda HI la perpendicolare AC, e condotta dal punto B, ove esiste la palla seconda, la perpendicolare Bb alla sponda HI (Fig. 22), alla IK (Fig. 23), alla KL (Fig. 24), alla LH (Fig. 25), alla HI (Fig. 26), ec., suppongasi AC$=a$, B$b$$=b$, IK$=HL=m$, HI$=LK=n$, CI$=c$, C$b$ (Fig. 22) $= d'$, Ib (Fig. 23) $= d''$, Kb (Fig. 24) $= d'''$, Lb (Fig. 25) $= d^{iv}$, Hb (Fig. 26) $= d^{v}$, ec.; inoltre, considerato come sciolto il Problema, si tirino le rette AM, MN, NP, ec. denotanti il viaggio della palla A, e si ponga CM$=x$. Finalmente si osservi che per le supposizioni fatte, dovendo sempre l'angolo di ri-

flessione essere uguale all'angolo d'incidenza, i'successivi triangoli, che vengono formati dalle indicate rette AM, MN, NP, ec. con le sponde, e le perpendicolari, risulteranno tutti simili fra di loro. Ciò fatto.

I. Vogliasi il primo caso. La somiglianza ora accennata de' triangoli ACM, BMb somministrandoci $a : x :: b : d' - x$, ci darà $x = \frac{ad'}{a+b}$.

Fig. 22

II. Nel caso secondo avendosi per la stessa somiglianza de' triangoli $x : a :: c - x$: IN $= \frac{a(c-x)}{x}$, e però N$b = d'' - \frac{a(c-x)}{x} = \frac{(a+d'')x - ac}{x}$, sarà $a : x :: \frac{(a+d'')x - ac}{x} : b$, e per conseguenza $x = \frac{a(b+c)}{a+d''}$.

Fig. 23

III. Trovato nel caso terzo, come nel precedente, IN $= \frac{a(c-x)}{x}$, avremo NK $= m - \frac{a(c+x)}{x} = \frac{(a+m)x - ac}{x}$ quindi $a : x :: \frac{(a+m)x - ac}{x}$: KP $= \frac{(a+m''')x - ac}{a}$, onde P$b = \frac{a(c+d''') - (a+m)x}{a}$; ed a cagione di $a : x :: b : \frac{a(c+d''') - (a+m)x}{a}$, avremo finalmente $x = \frac{a(c+d''')}{a+b+m}$.

Fig. 24

IV. Nel quarto caso (Fig. 25), poichè si trova, siccome nel terzo, KP $= \frac{(a+m)x - ac}{a}$, per cui PL $= \frac{a(c+n) - (a+m)x}{a}$; sarà $x : a :: \frac{a(c+n) - (a+m)x}{a}$: LQ $= \frac{a(c+n) - (a+m)x}{x}$, e però Q$b = \frac{(a+d''''+m)x - a(c+n)}{x}$,

onde risultando $x : a :: b : \frac{(a+d^{iv}+m)x-a(c+n)}{x}$, otterremo $x = \frac{a(b+c+n)}{a+d^{iv}+m}$.

V. Nel caso quinto ritrovato successivamente, come nei precedenti, $LQ = \frac{a(c+n)-(a+m)x}{x}$, Fig. 26

$QH = \frac{(a+2m)x-a(c+n)}{x}$, $HR = \frac{(a+2m)x-a(c+n)}{a}$,

$AB = \frac{a(c+d^{v}+n)-(a+2m)m}{a}$, per la proporzione

$a : x :: b : \frac{a(c+d^{v}+n)-(a+m)x}{a}$, si avrà infine $x = \frac{a(c+d^{v}+n)}{a+b+2m}$.

VI. Volendosi un sesto urto contro la sponda IK si determinerebbero nello stesso modo in Fig. 26 corrispondenza $x = \frac{a(b+c+2n)}{a+d^{v'}+2m}$; se si volesse inoltre una settima percossa contro la sponda KL, si otterrebbe corrispondentemente $x = \frac{a(c+d^{v''}+2n)}{a+b+3m}$. Chiedendosi un urto ottavo contro la LH, si ricaverebbe $x = \frac{a(b+c+3n)}{a+d^{v'''}+3m}$, e così di seguito. Onde in generale dopo un numero qualunque di urti contro le sponde successive, avremo, se il numero degli urti è dispari, $x = \frac{a(c+d^{(2p-1)}+(p-2)n)}{a+b+(p-1)m}$, e se è pari $x = \frac{a(b+c+(p-1)n)}{a+d^{(2p)}+(p-1)m}$, chiamato avendosi tal numero nel primo di questi due casi $2p-1$, e nel secondo $2p$.

Determinato algebraicamente il valore della x in tutti i casi, converrà ora cercarlo geometricamente, e costruite quindi le Figure, ottenere così la soluzione del Problema. Per ciò fare, si prolunghi in tutte le (Fig. 22 ec., 26 ec.) la perpendicolare AC sino ad un punto m tale che $Cm = AC$: poscia nelle (Fig. 23, ec. 26, ec.) prolungata all' insù la sponda KI indefinitamente, si conduca parallelamente alla sponda HI dal punto m la retta mn per modo, che risulti divisa per metà in D dalla HID, onde $Dm = Dn$: in seguito dal punto n si tiri nelle (Fig. 24, 25, 26 ec.) una retta np parallela alla sponda IK, e tale che rimanga segata per mezzo in E dalla sponda LK prolungata indefinitamente alla destra, onde $nE = Ep$: quindi dal punto p nelle (Fig. 25, 26, ec.) conducasi la pq parallela alla sponda KL, ed in modo che venga in F divisa per mezzo dalla sponda HL allungata all' ingiù, e sia perciò $pF = Fq$, dal punto q s' innalzi poscia nelle (Fig. 26, ec.) la qr parallela alla LH in modo, che venendo divisa per mezzo dalla sponda IH prolungata indefinitamente alla sinistra, si abbia $qG = Gr$: e così in progresso. Ciò fatto.

Fig. 22 1.° Conducasi nel primo caso dal punto m al punto B la retta mB, e la porzione CM determinata dalla intersecazione di questa mB con la HI costituirà il valore della x, onde tirata la AM, le AM, MB formeranno la strada, che nel primo caso terrà la palla A, onde urtare la palla B. Difatti per la somiglianza de' triangoli mCM, bMB, abbiamo $Cm : CM :: Bb : Mb$, e però $Cm + Bb$: $Cb :: Cm : CM$, ossia in termini analitici $a+b : c :: a$: CM, e quindi $CM = \frac{ac}{a+b} = x$ (*prec.* I.). Dunque ec.

Fig. 23 2.° Conducasi nel caso secondo dal punto n al punto B la nB, poscia dal punto N, ove la nB taglia la KI si tiri al punto m la Nm,

e dall'altro M, ove la Nm sega la HI condotta la MA, la retta CM sarà il valore della x nel secondo caso, e le AM, MN, NB segneranno la strada, che seguirà la palla A. Imperciocchè per la somiglianza de' triangoli BNb, nND, e per l'uguaglianza perfetta degli altri mND, nND si ha $DN:Dm::Nb:Bb$, e però $DN+Nb:Dm+Bb::DN:Dm$, ma essendo fra loro simili anche i triangoli mND, mMC, abbiamo $DN:Dm::mC:CM$; dunque risultando $DN+Nb:Dm+Bb::mC:CM$, sarà $a+d'':b+c::a:CM$

$$=\frac{a(b+c)}{a+d''}=x$$ (*prec.* II), Poichè adunque CM è il

valore della x; la AM sarà la prima retta, che nel suo movimento descrive la palla A; ma per la totale uguaglianza de' triangoli ACM, mCM si ha l'angolo AMC = all'angolo mMC, onde per l'uguaglianza degli angoli mMC, IMN, risultano fra loro uguali i due AMC, IMN. Dunque per la perfetta elasticità della palla, dovendo essere l'angolo d'incidenza uguale a quello di riflessione, la MN sarà la seconda retta, che percorre la palla A. Finalmente avendosi tanto l'angolo mND, come BNb uguale al terzo DNn, saranno uguali fra loro. Dunque, dovendo anche quì l'angolo d'incidenza uguagliare quello di riflessione, la NB sarà la terza, ed ultima retta, che nel caso presente la palla A descrive. Dunque ec.

3.° Nel caso terzo Fig. 24 conduco tra i punti p, B la pB, quindi dal punto d'intersecazione P al punto n la Pn, poscia dal punto d'intersecazione N ad m la Nm, infine dal punto d'intersecazione M ad A la MA; e ciò fatto io dico, che $CM=x$, e che le rette AM, MN, NP, PB costituiscono la strada, che deve tenere la palla A. Difatti per la somiglianza de' triangoli bPB, EPp, e la perfetta uguaglianza dei due EPp, EPn, avendosi $bB:bP::En:EP$, sarà $bB+En:bP+PE::En:EP$. Ora il triangolo EPn è simile all' altro DnN, $=DmN$.

Dunque essendo ancora il triangolo DmN simile all'altro CMm, avremo En : EP :: Em : CM, e per conseguenza bB + En : bP + PE :: Cm : CM, ossia bB + KI + Cm : bK + CI :: Cm : CM, poichè En = KI + ID = KI + Cm, e bP + PE = bE = bK + KE = bK + Dn = bK + mD = bK + CI; e in termini analitici avremo $b+m+a : d''' + c :: a :$ CM, onde CM $= \frac{a(c+d''')}{a+b+m}$. Dunque ec. (*prec.* III). Che poi le rette AM, MN, NP, PB segnano la via, che deve seguire la palla A in questo terzo caso si dimostra, come nel (*prec.* 2.°) con l'osservare, che i tre triangoli AMC, NmD, PnE sono in corrispondenza perfettamente uguali ai tre mMC, NnD, PpE, e che le rette mN, nP, pB intersecando le HI, IK, Kb formano gli angoli opposti al vertice uguali fra loro.

Fig. 25 4.° Tirata nel caso quarto la qB, dal punto d'intersezione Q conduco la Qp, poi dal punto di sezione P la Pn, inseguito dal punto di sezione N la Nm, e finalmente dal punto d' intersecazione M la MA; e ciò fatto avremo CM $= x$, e le AM, MN, NP, PQ, QB costituiranno la via, che deve seguire in questo quarto caso la palla A. In realtà essendo simili tra loro i triangoli bQB, QFp, sarà bQ + QF : bB + Fp :: QF : Fp; ma per la somiglianza dei triangoli QFp, EpP = EnP, per quella degli altri EnP, DNn = DNm, e per quella de' terzi DNm, CmM, abbiamo QF : Fp :: Cm : CM. Dunque risultando bQ + QF : bB + Fp :: Cm : CM, ossia BL + KI + Cm : bB + LK + CI :: Cm : CM, otterremo

$$\text{CM} = \frac{a(b+c+n)}{a+d''+m} = x \ (\textit{prec.}\ \text{IV.}).$$

5.° Si costruirà l' Equazione del caso quinto in una maniera pienamente simile alla esposta nei (*prec.* 1.°, 2.°, 3.°, 4.°), conducendo cioè successivamente nella (Fig. 26) le rette Br, Rq, Qp, Pn,

Fig. 26 Nm, MA, e per dimostrare, che la retta CM per

tal modo determinata è il valore della x nel (*prec.* V), e che AM, MN, ec., RB formano la via della palla A, non avremo che a fare un discorso affatto simile ai precedenti.

6.° Per quanto si voglia aumentare, come nel (*prec.* VI.) il numero delle percosse contro le sponde successive, vedesi che sempre avrà luogo lo stesso metodo di costruzione.

È facile a vedersi, che le rette AM, NP, QR, ec. risultano tutte parallele fra loro, come lo risultano fra loro le altre MN, PQ, ec.; onde se mai nei casi secondo, terzo; ec. divenisse $CM = x = CI$, allora divenuta la MN zero, la NB nel caso secondo, e la NP negli altri successivi coinciderebbe con la AM. Così se si ottenesse nei casi terzo, quarto, ec. $IN = IK$; svanita allora la NP, nel caso terzo la PB, e negli altri la PQ coinciderebbe con la MN, e così in progresso.

È chiaro, che nel primo degli esposti casi il Problema è sempre solubile; ma negli altri può non essere tale. Prendasi per esempio il caso quarto (*prec.* IV): il Problema in esso si vede, che non ammette soluzione, ogniqualvolta risulti $CM > CI$, oppure $IN > IK$, oppure $KP > KL$, oppure $LQ > Lb$. Ora per determinare, quando abbia luogo uno di tali accidenti, si pongano ne' rapporti ora accennati in vece delle rette i loro valori algebraici (*prec.* I, ec. IV); avendosi da ciò $x > c$, ovvero $\frac{a(c-x)}{x} > m$, ovvero $\frac{(a+m)x-ac}{a} > n$, ovvero $\frac{a(c+n)-(a+m)x}{x} > d''$, ne verrà corrispondentemente

$x > c$, oppure $< \frac{ac}{a+m}$, oppure $> \frac{a(c+n)}{a+m}$, ovvero $< \frac{a(c+n)}{a+d''+m}$; dunque il Problema non potrà risolversi, se non se allorquando il valore della x sia

Fig. 25

non $> c$, non $< \frac{ac}{a+m}$, non $> \frac{a(c+n)}{a+m}$, e non $<$ $\frac{a(c+n)}{a+d''+m}$; ma $x = \frac{a(b+c+n)}{a+d''+m}$ (*prec.* IV.). Dunque acciocchè l' accennato Problema sia solubile, i valori a, b, c, ec. dovranno essere tali, che si abbia, 1.° $a(b+n)$ non $> c(d''+m)$, 2.° $a(b+n)(a+m)$ non $< acd''$, 3.° $b(a+m)$ non $> d''(c+n)$, l' ultima condizione di x non $< \frac{a(c+n)}{a+d''+m}$ sarà, pel valore stesso della x evidentemente sempre vera. Nel modo stesso si determineranno le condizioni necessarie a verificarsi, acciocchè il Problema sia capace di soluzione negli altri casi.

Avvertasi finalmente, che, siccome non possono in Natura formarsi delle palle perfettamente elastiche, nè possiamo prescindere dall' attrito, o da qualunque mezzo resistente, quindi ne segue, che l' esperienza non potrà corrispondere a quanto si è quivi determinato.

CAPO III.

Dei luoghi geometrici determinati di 2.° grado, e della Costruzione delle Equazioni determinate di 2.° grado.

27. *Probl.* 7.° Trovare il luogo geometrico dell' espressiône $\sqrt{(ab)}$, rappresentandosi dalle a, b i valori delle due rette AB, CD.

Sol. Posto $\sqrt{ab}=x$, poichè ne viene $ab=x^2$, sarà $a:x::x:b$. Dunque altro non essendo la x che una media proporzionale geometrica tra le due a, b; la determinazione di tal media costituirà la soluzione del Problema proposto. Descritto pertanto sopra la retta EG $=$ EF $+$ FG, in cui EF $=$ AB $=a$, ed FG $=$ CD $=b$, il semicircolo EHG, e dal punto d' unione F innalzata la perpendicolare FH, sarà questa FH $=\sqrt{(ab)}$, e però il luogo geometrico domandato. Fig. 27

28. *Scol.* 1.° Sia $\sqrt{a}$ l'espressione data. Posta essa $=x$, avendosi $a=x^2$; dal (*n.°* 14) apparisce, che, se la a non esprime che una linea, la $\sqrt{a}$ non potrà rappresentare alcun valore geometrico: che se introdottasi nel calcolo la retta 1, sia come nel (*n.°* 16) $a=a\times 1$; allora la $\sqrt{a}=\sqrt{a\times 1}$ esprimerà pel (*n.° prec.*) la media proporzionale geometrica fra le due linee a, 1.

29. *Probl.* 8.° Supposto AB $=a$, CD $=b$, cercasi il valore geometrico della espressione $\sqrt{(a^2+b^2)}$.

Sol. Dall'estremo E di una retta EF $=$ AB $=a$ innalzo perpendicolarmente la retta EG $=$ CD $=b$, e compiuto il triangolo rettangolo GEF, poichè risulta

$\overline{FG}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{EG}^2$, sarà $FG = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Formato pertanto un triangolo rettangolo, ove i cateti siano le a, b, l'ipotenusa sarà il valore geometrico della $\sqrt{(a^2 + b^2)}$.

30. *Scol.* 2.° I. Che se l'espressione data sia la $\sqrt{(a^2 - b^2)}$; conviene primamente osservare se sia $a < b$, oppure $a = b$, ovvero $a > b$. Se ha luogo il primo di questi casi, la $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ esprimendo un valore assurdo immaginario, non potrà rappresentare alcuna quantità geometrica, poichè qualunque quantità geometrica, esistendo attualmente, è necessariamente reale. Che se $a = b$; allora la $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ diventando $= 0$, esprimerà una linea lunga zero, e quindi rappresenterà un punto. Nel caso finalmente, in cui $a > b$, supposto, che sia nella (Fig. 29) $AB = a$, $CD = b$, descrivo sopra di una retta $EF = AB$ un semicircolo, applico a questo dal punto A una corda $EG = CD$, il che, a cagione di $b < a$, e però di $EG < EF$, può sempre farsi, e condotta dal punto G all' altro F la GF, sarà questa evidentemente il valore geometrico della $\sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Fig. 29

II. Date siano le espressioni $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$, $\sqrt{(a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + e^2)}$. Per ottenere il luogo geometrico della prima; dalla estremità E della $EF = a$ s'innalzi perpendicolarmente la $EG = b$, e si tiri la FG: quindi dal punto G conducasi perpendicolare alla GF la $GH = c$, uniscansi i punti H, F con la HF, si conduca a questa perpendicolare la $HI = d$, e tirata finalmente la IF, sarà essa IF il luogo geometrico richiesto. Difatti per la costruzione fatta avendosi $\overline{FG}^2 = a^2 + b^2$, $\overline{FH}^2 = \overline{FG}^2 + c^2$, $\overline{FI}^2 = \overline{FH}^2 + d^2$, con la succesiva sostituzione otterremo $FI^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, e però $FI = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$. Ridotto nel caso secondo il radicale dato alla forma $\sqrt{((a^2 + d^2 + e^2) - (b^2 + c^2))}$, determino, come precedentemente due rette, la prima $= \sqrt{(a^2 + d^2 + e^2)}$,

Fig. 30

e che denomino f, la seconda $= \sqrt{(b^2 + c^2)}$, e che chiamo g. Avendosi quindi $\sqrt{((a^2 + d^2 + e^2))} - (b^2 + c^2) = \sqrt{(f^2 - g^2)}$ determino, come nel (*prec.* I) il valore geometrico della $\sqrt{(f^2 - g^2)}$, e tal valore sarà evidentemente il luogo geometrico della data espressione $\sqrt{(a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + e^2)}$.

III. Poichè $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$, vedesi che potremo ottenere il valore geometrico della $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ ancora col metodo del (*n.*° 27), trovando cioè una media proporzionale tra $a+b$, ed $a-b$. Così se nella $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ (*n.*° 29) si determini una terza proporzionale dopo le a, b, onde chiamata questa f, si abbia $af = b^2$, e però $\sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(a^2 + af)} = \sqrt{a(a+f)}$, si otterrà il valore geometrico della $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ anche col ritrovare una media proporzionale tra le a, ed $a + f$. In egual modo supposto di aver ritrovato con la determinazione delle terze proporzionali corrispondenti la $\frac{b^2}{a} = f$, la $\frac{c^2}{a} = g$, e la $\frac{d^2}{a} = h$, poichè risulta $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$ (*prec.* II) $= \sqrt{(a^2 + af + ag + ah)} = \sqrt{(a + f + g + h)a}$ si avrà il luogo geometrico di tal radicale anche col trovar una media proporzionale tre a, ed $a+f+g+h$.

IV. Se nelle espressioni date esistono sotto del vincolo radicale delle quantità non quadrate, come per esempio nella $\sqrt{\left(\frac{abc}{d} + de - fg\right)}$; allora, o riduco tutti i termini posti sotto del vincolo a tanti quadrati, trovando tra i fattori di ciascun termine una media proporzionale, e quindi faccio uso del metodo esposto nel (*n.*° 29), e nei (*prec.* I, II), oppure riduco tutti i termini esistenti sotto de' radicali ad avere un medesimo fattor comune; opero quindi come nel (*n.*° 27), e nel (*prec.* III), ed in amendue le maniere otterrò i luoghi geometrici

corrispondenti. Rapporto difatti alla $\sqrt{\left(\frac{abc}{d}+de-fg\right)}$ trovato dapprima il valore della $\frac{ab}{d}$ ($n.^o$ 9), che dirò h, o determino tre medie proporzionali la prima fra le c, k, la seconda fra le d, e, la terza tra le f, g, e denominate queste m, n, p applico alla espressione $\sqrt{(m^2+n^2-p^2)}=\sqrt{\left(\frac{abc}{d}+de-fg\right)}$ il metodo del citato (*prec.* II): ovvero ritrovo due quarte proporzionali, la prima dopo le c, d, e, la seconda dopo la c, f, g, e chiamate esse q, r, onde $\sqrt{\left(\frac{abc}{d}+de-fg\right)}=\sqrt{(c(h+q+r))}$, trovo, giusta il ($n.^o$ 27), una media proporzionale tra le quantità c, $h+q+r$.

V. Se i termini posti sotto del vincolo radicale rimanendo sempre, come si è supposto finora, omogenei, contengono poi invece di due, quattro, oppure sei dimensioni; allora il valore geometrico corrispondente sarà una superficie, ovvero un solido. Siano difatti $\sqrt{(abcd+efgh)}$, $\sqrt{(abcdef-ghikm+akl^2n^2)}$ i due radicali. Riguardo al primo di essi, determino in primo luogo il valore geometrico delle $\frac{ef}{a}$, $\frac{gh}{b}$ ($n.^o$ 9), chiamati questi m, n, riduco la $\sqrt{(abcd+efgh)}$ alla $\sqrt{(abcd+abmn)}=\sqrt{(ab)}\times\sqrt{(cd+mn)}$, e truovati i valori delle $\sqrt{(ab)}$, $\sqrt{(cd+mn)}$ che dirò p, q, avremo $\sqrt{(abcd+efgh)}$ $=$ al rettangolo pq. Riguardo poi all' altro radicale, supposto pel ($n.^o$ 9) $\frac{gh}{a}=p$, $\frac{kl}{b}=q$, $\frac{im}{c}=r$, $\frac{n^2}{c}=s$, e quindi $\frac{pq}{d}=t$, $\frac{lq}{d}=u$, poichè esso si riduce alla espressione

$\sqrt{(abcdef}$

$\sqrt{(abcdef - abcdrt + abcdsu)} = \sqrt{(ab)} \times \sqrt{(cd)} \times \sqrt{(ef - rt + su)}$; determinate le rette corrispondenti a questi tre radicali, il parallelepippedo, che da esse si forma, sarà il valore geometrico del radicale proposto.

VI. Se il numero delle dimensioni nei termini esistenti sotto del vincolo radicale sia diverso dal 2, dal 4, e dal 6, oppure se i termini medesimi non sono fra loro omogenei; allora il radicale supposto, non potrà, generalmente parlando, rappresentare alcun valore geometrico, quando mai non supplisse opportunamente la retta 1. Ciò si dimostra agevolmente in un modo simile a quello del (*n.*° 28). Ho detto, generalmente parlando, perchè avvi qualche caso particolare, nel quale, quantunque nel radicale dato manchi l' omogeneità, pure possono da esso rappresentarsi delle quantità geometriche. Sia per esempio il radicale $\sqrt{(abcd + efg + hi)}$. Posto esso $= xy + z$, se ne faccia il quadrato; risultando $abcd + efg + hi = x^2y^2 + 2xyz + z^2$, osservo se si abbia, o no $abcd = x^2y^2$, $efg = 2xyz$, $hi = z^2$; se sì, allora esprimendosi dalla xy una superficie, e dalla z una linea, la $\sqrt{(abcd + efg + hi)}$ rappresenterà il cumulo di queste due quantità geometriche. In tal caso però avendosi $abcd \times hi = x^2y^2z^2$, ed $e^2f^2g^2 = 4x^2y^2z^2$, e quindi $e^2f^2g^2 = 4abcd \times hi$, la $\sqrt{(abcd + efg + hi)}$ si ridurrà $= \sqrt{(abcd)} + \sqrt{(hi)}$, unione evidentemente di una quantità superficiale con una lineare.

31. *Probl.* 9.° Costruire un Equazione pura determinata di 2.° grado.

Sol. Sia $x^2 = A$ l' Equazione data, avendosi $A = ab$, oppure $= a^2 + b^2$, oppure $= a^2 - b^2$, ovvero $= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, ec., e sia XY la retta su cui deve prendersi il valore della x, F il suo principio. Presa nel primo di questi casi di quà, e di là dal punto F le porzioni FE, FG, determino, come nel (*n.*° 27), la $FH = \sqrt{(ab)}$; tagliata nei ca-

Fig. 27, 28, 29, 30

si secondo, terzo, e quarto la porzione $FE = a$, truovo come nei (*n.* 29, 30) la $FG = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ (Fig. 28), la $FG = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ (Fig. 29), la $FI = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ (Fig. 30); e quindi col raggio FH nel caso primo, con l'altro FG ne' casi secondo, e terzo, col raggio FI nel caso quarto, e sempre col centro F descrivo i due archetti P, Q, e questi nelle porzioni FP, $-$ FQ, che vengono tagliate cominciando dal punto F, e delle quali prendesi la seconda negativa, perchè in direzione opposta della positiva FP (IV. *n.*° 3), questi, dissi, determineranno i domandati valori geometrici della x nella $x^2 = A$. Ciò è evidente dall' essere $+\sqrt{A}$, $-\sqrt{A}$ le radici della proposta $x^2 = A$. Qualunque altro valore si rappresenti dalla A, otterremo sempre il cercato luogo geometrico, determinando prima pe' (*n.* 27, 29, 30) una retta ugnale alla $\sqrt{A}$, e quindi con questa come raggio, e dal punto, ove comincian le a come centro, descrivendo due archetti, i quali taglino sulla retta data di posizione due porzioni aventi direzione opposta, ed uguale ciascheduna alla $\sqrt{A}$.

Esprimendosi dalla x una retta, è chiaro che la A deve rappresentare una quantità di due dimensioni, ed è chiaro che deve questa A essere positiva, acciocchè esistano realmente i corrispondenti valori geometrici della x.

32. *Probl.* 10.° Costruire un' Equazione composta determinata di 2.° grado.

Sol. Qualunque sia l' Equazione composta determinata di 2.° grado, rifletto in primo luogo potersi essa sempre ridurre alla forma $x^2 + ax = b^2$. Imperciocchè supposta nell' Equazion data la debita uguaglianza delle dimensioni (*n.*° 14), e divisa essa pel coefficiente della x^2, il coefficiente della x dovrà risultare di una dimensione sola, e se tal coefficiente risulta formato di più termini, questi sommati insieme potranno considerarsi ridotti ad un termine solo, che dico a, riducendosi pei

($n.^i$ 9, 10, 2, 3) ad una sola le rette da loro rappresentate. Così dovranno pel cit.° ($n.°$ 14) risultare di due dimensioni tutti i termini affatto cogniti, ed essi sommati insieme potranno sempre ridursi mediante le operazioni esposte nei ($n.^i$ 27, 29, 30) ad un termine solo esprimente un quadrato, il quale per conseguenza chiamo b^2.

Eseguita pertanto l' accennata riduzione, osservo in secondo luogo, che nella Equazione $x^2 + ax = b^2$ risultataci, ciascuno de' coefficienti a, b^2 può essere positivo e negativo. In conseguenza di ciò

I. Supponghiamoli amendue positivi. In questo caso essendo

$$x^2 + ax = b^2$$

l' Equazione da costruirsi, preso su d'una retta indefinita DE un punto A, supponghiamo che da questo debbano incominciare i valori della x. Innalzata da A perpendicolarmente la $AB = b$, e presa la porzione $AC = \frac{a}{2}$ si conduca la CB, e quindi, fatto centro in C, col raggio CB si descrivano due archetti in G, ed in F. Ciò eseguito, facendo per ora astrazione dalle direzioni, avremo $CG = CF = CB$; ora $CB = \sqrt{(AC^2 + AB^2)} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)}$; dunque $CG = CF = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)}$; ma $AF = CF - CA$, ed $AG = AC + CG$, dunque sostituendo sarà $AF = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)} - FA = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)} - \frac{a}{2}$; $AG = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)}$. Introducendo presentemente la considerazione delle direzioni, e ponendo quindi che i valori, i quali da A si estendono verso F, siano positivi, e negativi quei che da A scorrono

Fig. 31

verso D, il valore di AG dovrà esser negativo, e quindi, tenendo conto della direzione, avremo $-AG = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)}$, mentre già resta $AF = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)} - \frac{a}{2}$, ossia $AF = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)}$.
Ora dalla soluzione della $x^2 + a = b^2$, ricaviamo $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)}$, dunque le due rette AF, $-$AG esprimono i due valori della incognita nell' Equazione proposta.

II. Rimanendo b^2 positivo sia il termine ax negativo, cosicchè l' Equazione divenga

$$a^2 - ax = b^2.$$

In questo caso l' Equazione si costruisce egualmente che quella del (*precd.*I), con questa sola differenza, che invece di prendere come nella (Fig.31) la $AC = \frac{a}{2}$ verso D, cioè verso il valore della x negativo, deve al contrario prendersi da A verso E, cioè dalla parte del valor positivo, come vedesi praticato nella (Fig. 32.); ed operato in seguito come precedentemente, ritroveremo nella cit.^{a} (Fig.32)

$$AG = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)}, \quad -AF = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)}$$

onde AG, $-$ AF rappresenteranno le due radici della $x - ax = b^2$.

III. Supponghiamo finalmente il termine cognito b^2 negativo, le due Equazioni dei due (*prec.*I,II) diverranno perciò

$$x^2 + ax = -b^2, \quad x^2 - ax = -b^2$$

Affine di costruirle su della data retta DE, preso il punto A, come principio dei valori della x, si tagli una porzione $AC = \frac{a}{2}$ verso il valor della x.

Fig. 33, 34

negativo, ossia verso D, come nella (Fig. 33), se vogliasi costruire la prima delle due poste Equazioni, e taglisi questa porzione $AC = \frac{a}{2}$ (Fig. 34) verso E, cioè verso il valore della x positivo, se proposta venga la seconda Equazione. Descritto in seguito nell' un caso, e nell' altro il semicircolo AHBL, s' innalzi perpendicolarmente il raggio CB, prendasi in questo la porzione $CK = b$, e condotta per K la LH parallela alla DE, si abbassino sopra la DE le due perpendicolari LG, HF. Ciò eseguito, e tirate le rette CH, CL, avremo, fatta astrazione dei segni, $CF = CG = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b^2\right)}$, e però nel primo caso $AF = AC - CF = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b^2\right)}$, $AG = AC + CG = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b^2\right)}$, e nel secondo $AF = AC + CF = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b^2\right)}$, $AG = AC - CG = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b^2\right)}$. Considerando ora le direzioni; poichè i valori AF, AG della (Fig. 33) scorrono verso D, dovranno essere presi negativamente, e per conseguenza i due primi precedenti valori della x saranno $-AF = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b^2\right)}$, $-AG = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b^2\right)}$, onde $-AF$, $-AG$ esprimeranno nella (Fig. *cit.*[a]) le radici della Equazione $x^2 + ax = -b^2$, come si esprimono dalle AF, AG nella (Fig. 34) le radici dell' altra Equazione $x^2 - ax = -b^2$.

IV. se fosse $b > \frac{a}{2}$, divenendo in allora $CK > CB$

il punto K cadrebbe fuori del circolo ; e non potrebbe per conseguenza condursi più la corda LH, e farsi il discorso del (*prec.* III) Ma se $b > \frac{a}{2}$, abbiamo ancora $b^2 > \frac{a^2}{4}$, ossia $\frac{a^2}{4} < b^2$, e però $\frac{a^2}{4} - b^2 < o$, onde $\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b^2\right)}$ quantità immaginaria. Dunque in questa supposizione essendo i due valori della x immaginarii, saranno pure immaginarie, assurde le rette, che a questi cosrispondono, e quindi il precedente metodo mostrerà eziandio quando le radici della data non sono reali.

33. *Scol.* 3.° I. Considerando le radici dell' Equazione precedente, vedremo facilmente che le radici della $x^2 + ax = b^2$ altro non sono che quelle della $x^2 - ax = b^2$, ma prese in senso contrario, e così le radici della $x^2 + ax = -b^2$, cangiatone il segno, uguagliano quelle della $x^2 - ax = -b^2$.

II. Vogliasi la costruzione della Equazione $x^2 - ax = cd$ senza ridurre, come nel (*n.*° 32), il termine cognito cd a quadrato. Supposto perciò che dal punto A debbano cominciare i valori della x, e che debbansi questi prendere sulla indefinita DE, conduco pel supposto punto A sotto un angolo qualunque un' altra indefinita MN, quindi posto che sia $c > d$, taglio sopra della MN una porzione AH $= c$, e cominciando dal punto H, ne taglio retrocedendo un' altra HI $= d$, in seguito presa sopra della DE, e alla destra di A una porzione AB $= a$, determino il centro C di un circolo, il quale passi pei tre punti A, B, I, e finalmente con questo centro, e col raggio CH descritto un circolo HFG, io dico che le AF, — AG saranno i due valori richiesti della x. Difatti descritto l' indicato circolo, che passi pei tre punti A, B, I, poichè abbiamo LA=IH, sarà LA×AH=cd, ma es-

Fig. 35

sendo ancora GA=BF, si ha GB=AF, e però GA=

AF$-a$. onde GA$\times$AF=AF$^2-a\times$AF. Dunque a cagione di GA$\times$AF=LA$\times$AH, avremo $\overline{AF}^2-a\times\overline{AF}=cd$. Ora quest' ultima Equazione altro non è che la proposta, cangiata semplicemente la x nella AF. Dunque dovrà essere la retta AF un valore della x medesima, ossia una radice della Equazione data: ma dalla precedente Equazione GA=AF$-a$ ricavasi AF$-$AG$=a$. Dunque essendo $-a$ il coefficiente del secondo termine nella $x^2-ax=cd$, ed AF una delle sue radici, sarà pel (*n.*° 228. *Alg.*) $-$ AG l' altra radice. Dunque ec. Vedesi che dovrà essere

$$AF=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}+cd\right)}, -AG=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}+cd\right)}.$$

III. Sia richiesto di costruire in modo simile a quello del (*prec.* II) l' Equazione $x^2-ax=-cd$. Condotta quì pure una indefinita MN, la quale passi per A principio già stabilito delle x, e faccia un angolo qualunque con la indefinita DE, su della quale le x stesse si devono prendere, si tagli nella DE medesima, e alla diritta di A la porzione AB$=a$, quindi supposto $c>d$, si tagli sopra la MN la porzione AH$=c$, poscia, proseguendo innanzi, l' altra HI$=d$, e trovato il centro C del cerchio, che passa pei tre punti A, B, I, si descriva con questo centro e col raggio CH la circonferenza HLGF; ciò fatto io dico, che mentre le due radici della data $x^2-ax=-cd$ siano reali, e disuguali fra loro, tale circonferenza deve tagliare la AB in due punti G, F, e che quindi AF, AG saranno i due valori geometrici della x. Abbassate difatti dal centro C sulle AB, AI le perpendicolari CK, CO, e condotti i raggi CA, CH,

Fig. 36

poichè risulta $\overline{CO}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{OH}^2$, sarà $\overline{CA}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OH}^2 + \overline{CH}^2 = (AO + OH)(AO - OH) + \overline{CH}^2 = AH \times AL + \overline{CH}^2 = cd + \overline{CH}^2$; ma $\overline{CK}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{AK}^2 = \overline{CA}^2 - \frac{a^2}{4}$: dunque $\overline{CH}^2 - \overline{CK}^2 = \frac{a^2}{4} cd$. Ora se le radici della $x^2 - ax = -cd$ sono reali e disugali fra loro, deve essere $\frac{a^2}{4} > cd$; dunque risultando in questa ipotesi $CK < CH$, si verificherà in primo luogo, che l'indicata circonferenza HLGF sega la AB, nei punti G, F. In conseguenza di simile segamento avremo $AG \times AF = AL \times AH = cd$; ma $AG = FB = AB - AF = a - AF$; dunque risultando $a \times AF - \overline{AF}^2 = cd$, e però $\overline{AF}^2 - a \times KF = -cd$, dovrà essere AF uno dei valori della x; ma $AG + AF = AB = a$; dunque AG sarà l'altro valore. Avremo evidentemente $AF = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - cd\right)}$, $AG = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - cd\right)}$.

IV. Se la Equazione data sia la $x^2 + ax = cd$, oppur l'altra $x^2 + ax = -cd$, poichè pel (*prec.* I) le radici della prima non sono che quelle della $x^2 - ax = cd$, cambiatine i segni, e le radici della seconda non sono che quelle della $x^2 - ax = -cd$, fatto il cambiamento dei segni, ne segue che il metodo esposto ne' (*prec*ᵗ II. III) servirà egualmente alla costruzione delle Equazioni $x^2 + ax = cd$, $x^2 + ax = -cd$, avuta soltanto l'avvertenza di prendere sulla retta data la porzione AB alla sinistra del punto A.

CAPO IV.

Della soluzione dei Problemi Geometrici determinati di 2.° grado

34. *Esem.* 8.° Dato il semicircolo AEB s' innalzi da un punto dato D del diametro AB la perpendicolare DE, e nella porzione DB come su diametro, descritto il semicircolo DIB, sia richiesto di formare un circolo NIL tale, che tocchi la perpendicolare DE, la semicirconferenza AEB, e l' altra DIB. Fig. 37

Sol. Cogniti essendo il raggio AC, la perpendicolare DE, e la retta DB, e quindi la sua metà DO, ponghiamo $AC=a$, $DO=b$, $DE=c$, e $CD=a-2b=d$. Ciò fatto affine di descrivere il circolo domandato, è chiaro, che non dovremo, se non che determinarne il centro P, poichè da questo abbassata sulla DE la perpendicolare PN, essa come raggio formerà il cerchio richiesto. Ma quale retta prenderemo noi per incognita, onde determinare questo punto; giacchè esso non ritrovasi su di alcuna delle rette date di posizione? In questo caso ci serviremo di due incognite nella seguente maniera. Dal punto P che si cerca, come se già fosse determinato, abbassiamo sulla CD la perpendicolare PM, e chiamiamo x la DM, y la MP, dalla determinazione di queste è chiaro che avremo la soluzione del Problema. Supponghiamo con la perpendicolare PN descritto il circolo NLI, e pei centri C, P, O conduciamo le rette CPL, OP, è facile il vedere che $CPL=CA$ porta il suo estremo al punto di contatto L; e che PO passa per l' altro

punto di contatto I, e per conseguenza che abbiamo CL$=a$, PL$=$PN$=$DM$=x$, OI$=$DO$=b$. Ora $\overline{CP}^2=\overline{CM}^2+\overline{MP}^2$, $\overline{PO}^2=\overline{MO}^2+\overline{PM}^2$, e CP$=$ CL $-$ PL $=a-x$, CM $=$ CD $+$ DM $=d+x$, PO$=$IO$+$IP$=b+x$, MO$=$DO$-$DM$=b-x$, dunque avremo $(a-x)^2=(d+x)^2+y^2$, $(b+x)^2=(b-x)^2+y^2$, e però $a^2-2ax=d^2+2dx+y^2$, $2bx=-2bx+y^2$. Dalla seconda di queste Equazioni ricavo $y^2=4bx$, sostituisco nella prima, ed ottengo $a^2-2ax=d^2+2dx+4bx$, ossia $(4b+2d+2a)\,x=a^2-d^2$, e però $x=\dfrac{a^2-d^2}{4b+2d+2a}$. Ora $a^2-d^2=(a+d)\,(a-d)=\overline{AD}\times\overline{DB}=\overline{DE}^2=c^2$, e $2d=2$CD$=2a-4b$, onde $4b+2d+2a=4b+2a-4b+2a=4a$. Dunque dalla sostituzione venendo $x=\dfrac{c^2}{4a}$, affine di avere il valore della x prolungo le ED, DB sino in S, T per modo che DS$=4a$, DT$=c$, tiro la ST, e dal punto R tale che DR$=c$ conduco la RM parallela alla ST, e otterremo così evidentemente DM$=x$. Cercando presentemente il valore della y, poichè abbiamo $y^2=4bx$, prendo MV $=$ MD $=x$, MZ $=4b$, sulla ZV come su diametro descrivo il semicerchio ZPV, da M innalzo fino alla circonferenza descritta, la perpendicolare MP, e questa essendo pel (*n.*° 27) il valore della $y^2=4bx$, ci determinerà il punto P domandato, e però ci scioglierà il Problema.

35. *Scol.* 1.° Sciogliendo l' Equazione $y^2=4bx$ abbiamo due valori della y, cioè $y=+\sqrt{(4bx)}$, $=-\sqrt{(4bx)}$; col primo di questi sciogliamo il Problema precedente: a che serve ora il secondo? **Fig.** 38 Compiasi, come nella (Fig. 38), il Circolo ZPV, e si prolunghi la PM sino in Q, risultando MQ$=$MP e in direzione opposta, giacchè MP$=+\sqrt{(4bx)}$, ne verrà $-$MQ$=-\sqrt{(4bx)}$. Determinato così il punto Q corrispondente al secondo valore della y, per vedere a qual cosa esso serva, si compiano pur an-

che i due circoli AEB, DIB, e si prolunghi la ED sino in F; lo stesso problema che è stato proposto al disopra tra i due semicircoli AEB, DIB, e la retta DE, poteva proporsi egualmente tra la retta DF, e i due semicircoli AFB, DGB compimenti dei primi, e il punto Q vedesi essere quello che determina il centro del cerchio GHK tangente quest' ultime quantità, e quello per conseguenza, che scioglie l' istesso Problema al disotto.

Ma noi avevamo proposto il Problema soltanto al disopra, come dunque abbiamo ottenuto anche il valore — MQ, che scioglie il Problema di sotto. Le stesse proprietà, che competono ai semicircoli AEB, DIB, ed alla DE, spettano egualmente ai semicircoli AFB, DGB, ed alla DF, onde cercando il punto Q non possiamo che cadere in queste stesse Equazioni, che abbiamo ottenute pel punto P. Dovendo dunque le Equazioni medesime servire per la determinazione di amendue i punti P, Q, non potranno a meno di non esibirceli entrambi nel tempo stesso.

36. *Esem.* 9.° Dato l'angolo QAN, e dal punto B dato su della AQ innalzata la perpendicolare BD sino ad incontrare in D l' altro lato AN, vogliasi sul lato AQ determinare un altro punto P, da cui innalzata la perpendicolare PM, ne venga PM=MD. Fig. 39

Sol. Cognito essendo il punto B, note saranno le tre rette AB, BD, AD; ponghiamo pertanto $AB=a$, $BD=b$, $AD=\sqrt{(a^2+b^2)}=c$, e supposta condotta la PM, che si cerca facciamo $AP=x$, $PM=y$; avendosi AB : BD : : AP : PM, sarà $a:b::x:y = \frac{bx}{a}$, e quindi per la condizione del Problema

$DM = MP = \frac{bx}{a}$. ma abbiamo anche PB:MD::AP:AM,

e però $a - x : \frac{bx}{a} :: x : AM = \frac{bx^2}{a(a-x)}$; dunque a cagione di $\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2$ ne verrà $\frac{b^2x^4}{a^2(a-x)^2} = x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}$, e riducendo $b^2x^2 = (a^2+b^2)(a-x)^2$; ma $a^2+b^2 = c^2$, dunque, fatto il quadrato, e fatte le dovute eliminazioni, e sostituzioni, otterremo $x^2 - \frac{2c^2}{a}x + c^2 = 0$. Sciolgo presentemente questa Equazione e risultando $x = \frac{c^2}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2} - c^2\right)}$, ne cerco la costruzione nella seguente maniera. S'innalzi da D la perpendicolare DC, e si prolunghi sino ad incontrare in C la AQ; fatto in seguito centro in C col raggio CD descrivasi il cerchio PDQ, e AP, AQ saranno i due valori di x ora ottenuti; e difatti a cagione del triangolo ACD rettangolo avendosi AB : AD :: AD : AC, sarà $a : c :: c : AC = \frac{c^2}{a}$, e $CP = CQ = CD = \sqrt{(\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2)} = \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2} - c^2\right)}$, e per conseguenza $AP = AC - PC = \frac{c^2}{a} - \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2} - c^2\right)}$, $AQ = AC + CQ = \frac{c^2}{a} + \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2} - c^2\right)}$. Innalzo pertanto dai punti P, Q le perpendicolari PM, QN, e ne verrà, come richiedevasi PM = MD, NQ = ND.

37. *Scol.* 2.° Il nostro Problema ha dunque due soluzioni, e quindi è che siamo giunti ad un' Equazione di 2.° grado. Non ogni volta però che giungiamo ad un' Equazione del grado secondo, dobbiamo noi dire viceversa che il Problema proposto abbia due soluzioni: vedremo cogli esempi seguenti,

che alcune volte le due radici dell'Equazione, quantunque diverse fra loro, pure può quasi dirsi, che non danno amendue, che una soluzione di uno stesso Problema, ed altre volte una delle radici scioglie benissimo il Problema propostoci, ma la seconda ne viene, per dir così, tacitamente a scioglierne un altro, per lo meno in aspetto, ben diverso dal primo.

38. *Esem.* 10.° Dato un circolo BNDG, il cui raggio $CB = a$, e dato un punto A fuori del medesimo, tirare da questo punto una secante AMN tale che la porzione MN compresa entro del circolo risulti uguale al raggio a. Fig. 40

Sol. Tirata pei punti A, C la AD, sia $AB = b$, e $AD = b + 2a = c$; e supposta condotta la AN, bastando per la soluzione del Problema di determinare il solo punto M, potrei abbassare da M la perpendicolare MP, e porre $AP = x$, $PM = y$, siccome nel ($n.$° 34): ma in questo caso riescendo la soluzione più semplice col prendere per incognita la AM, faccio $AM = z$, e verranne $AN = z + a$: ora $AB : AM :: AN : AD$; dunque $b : z :: z + a : c$, e però $z^2 + az = bc$, $z = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + bc\right)}$. Per costruire questa Equazione potrei servirmi del metodo indicato nei (II, IV. $n.$° 33); gioverà però l'esporre il seguente, il quale in casi di simile natura è generale egualmente che l' altro; tirisi perciò da A la tangente AG, il raggio CG, e da A al punto H preso alla metà di CG la retta AH, quindi fatto centro in H, e con un raggio $= HG = \frac{a}{2}$, descritti due archetti in E, F, le due rette AE, AF, fatta astrazione della direzione, corrisponderanno ai due valori dalla z, ed in realtà avendosi $AB : AG :: AG : AD$, ossia $b : AG :: AG : c$, ne verrà $AG^2 = bc$, e però $AH = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + bc\right)}$, onde

$AE = -\frac{a}{2} + \surd\left(\frac{a^2}{4} + bc\right)$, $AF = \frac{a}{2} + \surd\left(\frac{a^2}{4} + bc\right)$;
ora tra questi due valori della z uno ve n' ha positivo, cioè il più breve AE, e uno negativo, cioè il corrispondente ad AF, e frattanto nel calcolo abbiamo sempre considerata la z positiva; dunque tra i due valori ritrovati, quello che propriamente scioglie ora il Problema, sarà il positivo AE. Pertanto col raggio AE, e centro A descrivo un arco, che tagli la circonferenza in M, e per questo punto M, e per A tirata la AMN, avrò sciolto così il Problema, risultando $MN = a$.

39. *Scol.* 3.° In vece di prendere per incognita la AM, supponghiamo di prendere la AN, e facciamo $AN = z$, venendone $AM = z - a$, e quindi $b : z - a :: z : c$, $z^2 - az = bc$ sarà l' Equazione, da cui ricaveremo il valore di AN. Ora le radici di questa Equazione altro non sono che le radici della $z^2 + az = bc$ prese in senso contrario (I. *n.*° 33). Dunque la radice positiva della $z^2 - az = bc$ esprimendo per la supposizione il valore di AN, ed uguagliando essa, cangiato il segno, la radice negativa della $z^2 + az = bc$, non sarà che la $AF = AN$. Dunque i due valori AE, AF ritrovati nel (*n.*° *prec.*) non facendo che determinare i due punti M, N non servono amendue che a condurre la sola AMN, e non danno perciò che la stessa soluzione del nostro Problema. Tenendo conto però com' è pur di dovere, del segno nell'altra radice della $z^2 + az = bc$, vedesi che il valore geometrico di questa altro non è che un prolungamento della MA a sinistra del punto A, ed uguale ad AN; e vedesi quindi che questo prolungamento scioglie bensì il Problema stesso, che sciogliesi dalla AN, ma lo scioglie in un altro circolo descritto alla sinistra del punto A, e sotto la retta BA, uguale, e similmente posto che il dato BGDNB.

Fig. 41 40. *Esem.* 11.° Dato un triangolo ABC inscrivere ad esso un altro MNP tale, che i lati MN,

NP risultino rispettivamente paralleli ai lati BC, AC, e la sua area stia all' area del dato in una data ragione di $m:n$.

Sol. Pel parallelismo de' lati MN, MP con gli altri BC, AC abbiamo l'angolo NMP $=$ C; dunque MN $\times$ MP : AC $\times$ BC :: $m:n$. Ora posto AB $= a$, BC $= b$, AC $= c$, AM $= x$, pel parallelismo istesso si ha $a:b::x:\text{MN}=\frac{bx}{a}$, $a:c::a-x:\text{MP}=\frac{c(a-x)}{a}$. Dunque ottenendosi $\frac{c(a-x)bx}{a^2}:bc::m:n$ sarà $x^2-ax = -\frac{ma^2}{n}$ e però $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-\frac{ma^2}{2}\right)}$. Per costruire l'ottenuta Equazione, replicato nella (Fig.42) il triangolo dato ABC, prolungo alla sinistra il lato BA sino ad un punto D tale che AD $=\frac{ma}{n}$; descritte quindi sopra i due diametri DB, AB le due semicirconferenze DEB, AFGB, innalzo dall' estremo A la perpendicolare AE; dal punto E, ove questa taglia la semiperiferia DEB, conduco una retta EG parallela alla AB, dai punti F, G, ove essa sega la semicirconferenza AFGB, conduco le FM, GM perpendicolari alla AB, ed i punti M, M' determineranno i due valori della x, cosicchè condotte le MN, M'N' parallele a BC, e le MP, M'P' parallele ad AC, tanto il triangolo MNP, come l' altro M'N'P' starà al grande ABC nella chiesta ragione di $n:m$. La ragione della esposta costruzione deducesi agevolmente dal metodo generale accennato nel (III. n.° 32).

Fig. 42

Acciocchè questo Problema sia possibile, deve essere come nel (IV. n.° 32), $\frac{a^2}{4}$ non $<\frac{ma^2}{n}$, e però n non $<4m$: se $n>4m$, la AE $=\sqrt{\frac{ma^2}{n}}$ risultando maggiore di $\frac{\text{AB}}{2}=a$, la EG non incontre-

rà il semicerchio AFB; che se $n=4m$; allora la EG divenendo tangente allo stesso AFB, il Problema avrà una soluzione sola, ed un solo sarà il triangolo domandato.

Fig. 43 41. *Esemp.* 12.° Data la retta AB, formare su d'essa un triangolo ADB isoscele, e tale che l'angolo al vertice D sia metà di ciascuno degli angoli alla base A, ABD.

Sol. Supposto già formato il triangolo ADB richiesto dal Problema, conducasi dal punto B la retta BE per modo, che divida l'angolo ABD per metà; verremo così a formare il triangolo ABE, il quale a cagione di $ABE=\frac{ABD}{2}=D$, e di $A=a$ se medesimo, sarà simile al triangolo ADB, e si avrà per conseguenza $BE=AB$. Chiamiamo ora a la AB, e il lato $AD=BD$ incognito z; a cagione dell' angolo $EBD=D$ sarà $ED=BE$, e perciò avremo $ED=BE=AB=a$, $AE=z-a$, ma per la somiglianza dei triangoli AEB, ABD abbiamo AE:AB::AB:AD, dunque sarà $z^2-az=a^2$. Sciolgo ed in $z=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}+a^2\right)}$ avremo il valore di $AD=BD$. Prolunghisi alla destra AB indefinitamente, s' innalzi da B la perpendicolare $BM=a$, e presa alla destra di B la $BC=\frac{a}{2}$, col raggio CM si descriva il semicerchio QMP; pel (II. *n.*° 32) otterremo BP $=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}+a^2\right)}$, $-BQ=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}+a^2\right)}$, e questi saranno i valori della x, dei quali per la ragione istessa accennata nel (*n.*° 38) il positivo BP quello sarà propriamente, che scioglie il Problema proposto. Facendo adunque centro in A, B, descrivo due archetti circolari, che si taglino in D, con il raggio medesimo BP, e condotte le rette AD, BD, avremo

avremo in tal modo formato il triangolo ABD, che richiedevasi.

42. *Scol.* 4.° I.° Cerchiamo presentemente di determinare a che serva l'altra radice BQ, e come essa nasca. Per formar l'Equazione, che ha servito alla soluzion precedente, noi non abbiamo che determinata una proporzione AE : AB :: AB:AD, deducendola da un triangolo ABE formato simile al richiesto ABD, col tirare da B sino al lato AD una retta BE, e risultando intanto ED=EB=AB. Ora non potrebbe egli tirarsi da B un'altra retta BE, che dotata fosse delle stesse proprietà della BE precedente, e che producendo la proporzione istessa ci conducesse ad una simile Equazione? Nel triangolo ABD richiesto nel (*n.° prec.*) ciò non può farsi giammai, poichè dovendo essere l'angolo ABD=2D, non v'è che la retta precedente BE, che tagliando per mezzo l'angolo ABD, possa produrre il triangolo ABE simile all'altro ABD, ma potrebbe bensì esistere un'altro triangolo, in cui tirando questa BE, essa soddisfaccia alle stesse condizioni della precedente. Rappresenti pertanto ABD questo nuovo triangolo, e conducasi in esso la nostra BE; questa o cade entro del triangolo medesimo, o cade fuori: supponghiamo primieramente, che cada dentro come nella (Fig.44), dovendo essere AB=BE =ED, e il triangolo ABE simile ad ABD, ne verrà anche AD=DB, e l'angolo AEB=2D; dunque anche l'angolo A=ABD=AEB=2D, e però la supposta BE cadendo entro del triangolo, che ci siamo formati, questo non potrà che avere l'angolo al vertice D metà di ciascuno degli angoli alla base, ed altro non sarà per conseguenza che il triangolo precedente (Fig.43). Cada dunque la BE fuori del triangolo ABD, come nella (Fig.45); essa incontrerà il lato AD prolungato in E, e potranno benissimo il triangolo ABD, e la retta BE essere ta-

Fig. 44

Fig. 45

li, che ne venga AB=BE=ED, il triangolo ABE simile all' altro ABD, e quindi ne nasca la proporzione AE:AB::AB:AD, vale a dir quella stessa, che ci hà condotti alla soluzione del Problema precedente.

Chiamiamo z il lato AD di questo nuovo triangolo ABD; dovendo essere $AB=BE=ED=a$, ed $AE:AB::AB:AD$, otterremo $z+a:a::a:z$, e però $z^2+az=a^2$. Dunque la radice positiva di questa uguagliando la radice negativa della $z^2-az=a^2$, cangiatone il segno, ossia uguagliando la BQ (Fig.43); ne viene, che questa BQ uguaglierà il lato BD del nuovo triangolo ABD (Fig.45), e per conseguenza le rette BP, BQ non sono che i lati di due triangoli isosceli poggianti sulla stessa base $AB=a$, ma diversi fra loro; il primo di questi noi lo conosciamo, quale sarà il secondo?

Poichè nella (Fig.45) abbiamo $AB=BE=ED$; e $AD=DB$, ne verrà l' angolo $ADB=DBE+E=BDE+E$; ma $BDE=2A$, ed $E=A$, dunque sarà $ADB=2A+A=3A$, e quindi a cagione di $A=ABD$, avremo nel nostro triangolo l' angolo al vertice ADB triplo di ciascuno degli angoli alla base.

II. L' Equazione dunque $z^2-az=a^2$ viene a sciogliere due Problemi in aspetto ben diversi fra loro, quali sono, data una retta, 1.° determinare su di essa un triangolo isoscele, che abbia l' angolo al vertice metà di ciascuno degli angoli alla base; 2.° formare sulla retta data un triangolo isoscele, che abbia l' angolo al vertice triplo di ciascuno di quelli alla base. Ma pure questi Problemi, posta $AD=z$ hanno tali legami fra loro, che non può sciogliersi l' uno senza cadere a sciogliere l' altro; sì nell' un triangolo, che nell' altro la BE produce la stessa uguaglianza $AB=BE=ED$, ed insieme produce la stessa proporzione AE:AB:: AB:AD, da cui propriamente deduciamo la soluzione richiesta, e quindi è che tali due Problemi possono ridursi ad un solo; dicendo: formare sopra

della data AB un triangolo isoscele ADB tale che, tirata dal punto B al lato AD, prolungato se occorre, la BE, risulti AB=BE=ED, ed insieme AE:AB::AB:AD.

III. Supponghiamo, che si richieda di dividere due angoli retti in cinque parti uguali, e poscia di combinare queste parti, senza più spezzarle, nella formazione di un triangolo per modo che questo risulti un triangolo isoscele.

Essendo 180.° il valore di due retti, chiamiamo φ il valore della loro quinta parte, cosicchè $\varphi = \frac{180°}{5} = 36°$. Per determinare il triangolo domandato, supponghiamo di formarlo per modo, che il suo angolo al vertice, cioè l'angolo compreso fra i lati uguali sia φ; restando 4φ da distribuirsi ai due angoli alla base; ciascuno di essi non potrà essere che 2φ, e avremo così un triangolo isoscele, che ha l'angolo al vertice metà di ciascuno degli angoli alla base. Supponghiamo in secondo luogo di formare un triangolo isoscele, il cui angolo al vertice sia 3φ; restano 2φ da distribuirsi agli angoli alla base, ciascuno di questi adunque non potrà essere che φ, e avremo per tal modo un triangolo equicrure, in cui l'angolo al vertice è triplo di ciascun della base. Non suppongo di formare triangoli isosceli, ne' quali l'angolo al vertice sia 2φ, o 4φ, poichè restando nell'un caso 3φ, e nell'altro φ, è impossibile distribuire questi avanzi per gli angoli alla base senza produrre dei rotti, il che è contro la supposizione. Dunque due sono le soluzioni del nostro Problema, e i due triangoli precedenti quelli sono, che le somministrano.

43. *Esem.* 13.° Condurre da un dato punto ad un triangolo dato una retta, la quale divida l'area del triangolo medesimo in una determinata ragione geometrica.

Sol. Sia $m:n$ questa ragione, ABC il triangolo, e D il punto dato. Potendo questo punto esi- Fig. 46, 47, 48.

stere, o fuori del triangolo medesimo (Fig. 46), o dentro (Fig. 47), o sopra uno de' suoi lati, per esempio sul lato AB (Fig. 48).

I. Comincio dal supporre, che esista fuori (Fig. 46) e in tale ipotesi supposto, che la retta DE sia quella che scioglie il Problema, poichè ne viene AME : MECB : : $m : n$, sarà ancora AME : ABC : : $m : m + n$: : $m : p$ (fatto per brevità $m + n = p$) e quindi AE×AM : AC×AB : : $m : p$. Facciasi AC$=a$, AB$=b$, AE$=u$, AM$=z$; dal punto D conduco la DF parallela al lato BA fino ad incontrare in F la CA prolungata; e poichè il punto D è dato, e le rette DF, FA sono perciò cognite, supponghiamo DF$=c$, AF$=d$. Ciò posto, essendo DF : FE : : AM : AE, ed $\overline{AC\times AB}$: $\overline{AE\times AM}$: : $p : m$, e sostituiti i dovuti valori, risultando $c : d + u : : z : u$, $ab : uz : : p : m$, ne verrà $cu = dz + uz$, $puz = abm$, ed eliminata la u, otterremo l'Equazione $z^2 + \frac{abm}{pp} z = \frac{abcm}{dp}$. Per costruirla, ritrovata una quarta proporzionale dopo le tre quantità p, m, b, prendasi sul lato AB la porzione AI$= \frac{bm}{p}$, pei punti F, I conducasi la FIL fino ad incontrare in L la retta CL condotta da C parallela al lato AB, e da I si tiri la IK parallela ad AC; ciò fatto avendosi AF : AI : : IK : KL, ossia $d : \frac{mb}{p} : : a :$ KL, ne verrà KL$= \frac{abm}{dp}$; chiamiamo f questo valore, e poniamolo in vece di $\frac{abm}{dp}$ nella $z^2 + \frac{abm}{dp} z = \frac{abcm}{dp}$, otterremo così l' Equazione $z^2 + fz = cf$, e quindi sarà $z = -\frac{f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f^2}{4} + cf\right)}$. Si prolunghi ora la DF al disotto, e preso FN$=f=$KL, s'innalzi da F la perpendicolare FR fino ad incontrare in R la circonferenza DRN descritta sul diametro DN, dalla metà O della FN si conduca ad A la retta OR, e finalmente facendo centro in O

col raggio OR si descrivano i due archetti circolari in P, ed in Q; eseguite tutte queste operazioni, FP, — FQ saranno i due valori della z: conduco pertanto da P una retta PM parallela ad FA, e il punto M, ove questa taglia il lato AB sarà il richiesto, cosicchè, conducendo pei punti D, M la retta DME, essa farà sì, che il triangolo ABC : AME : : $p:m$, e quindi, che AME : BMEC : : $m:n$, siccome era stato richiesto.

II. Sia il punto D entro il triangolo ABC; in questo caso condotta la DF parallela ad AB, ritenute le stesse denominazioni, e replicato lo stesso raziocinio del (*prec.* I) troveremo le proporzioni $c:u-d::z:u$, $ab:uz::p:m$, e però l'Equazione $z^2-\frac{abm}{dp}z=-\frac{abcm}{dp}$, ossia $z-fz=-cf$, determinatosi in maniera consimile alla precedente il valore di $f=\frac{abm}{dp}$. Sciolgo ora l'Equazione ottenuta, e risultando $z=\frac{f}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{f^2}{4}-cf\right)}$, affine di costruirla, prolungo il lato AB indefinitamente, prendo su di questa retta le porzioni AH, HK ciascuna $=\frac{f}{2}$, taglio AL $=$ 2FD $=2c$, su di LK descrivo il semicerchio LPK, dal punto H innalzo la perpendicolare HP, e con questa come raggio, facendo centro in H, descrivo due archetti in M, m; ciò eseguito avremo le due rette AM, Am, e queste formeranno i due valori della z, come si può veder facilmente. Conduco pertanto pel punto M e per l'altro D la retta MDE, e questa scioglierà il Quesito, risultando da essa AME : ABC : : $m:p$, e però AME : BMEC : : $m:n$.

III. Esista il punto D sopra di uno dei lati per esempio sopra del lato AB. In questo caso risulterà $d=0$, e diventando $z=$AD$=c$ l'incognita da determinarsi sarà AE$=u$, e quindi per la solita pro- Fig. 48

porzione AE $\times$ AD : AC $\times$ AB : : $m : p$, avremo $u = \frac{abm}{cp}$. Trovata, come si è detto nei (*prec.* I, II) la AI $= \frac{bm}{p}$, onde $u = \frac{a \times AI}{c}$, si uniscano con la DC i punti D, C, dal punto I si conduca alla DC la parallela IE, e questa determinerà evidentemente in E il punto richiesto, onde ec.

Fig. 46, 47, 48 Fig. 49, 50, 51

IV. Finora si è supposto tacitamente che risulti la retta AE non > AC; ma se mai ne divenisse, siccome nelle (Fig. 49, 50, 51), maggiore, allora dalle operazioni dei (*prec.* I, II, III) si avrebbe bensì ABC : AME : : $p : m$, ma non essendo AME una porzione del solo triangolo dato ABC, nè essendo ABC—AME uguale all' altra porzione del triangolo medesimo, ne viene, che non si avrebbe punto la soluzione del Problema proposto. In questo caso invece della AM prendasi per z la BM, e per u la BE', si conduca dal punto D la DF' parallela al lato AB sino ad incontrare non il lato CA, come nei (*prec.*[i] I, II), ma l'altro CB, e posto quì pure DF'$=c$, BF'$=d$, e posto BC$=e$, poichè si vuole AME'C : MBE' : : $m : n$, col discorso medesimo dei citati (*prec.*[i] I, II) otterremo la Equazione per la (Fig. 49) $z^2 + \frac{ben}{dp} z = \frac{bcen}{dp}$, per la (Fig. 50) l'altra $z^2 - \frac{ben}{dp} z = - \frac{bcen}{dp}$, e per la (Fig. 51) la terza $u = \frac{ben}{dp}$. Siccome le tre Equazioni ora ottenute sono perfettamente simili alle tre de' (*prec.* I, II, III); quindi è che ne avremo ancora in un modo affatto simile le costruzioni rispettive, dicendosi però quivi del punto B, e del lato BC quello che là si è detto del punto A, e del lato AC. Per determinare poi, quando abbiano luogo le presenti, e quando le soluzioni de' (*prec.* I, I, III), si

cerchino in questi ultimi paragrafi i valori della u, e ottenutosi nel primo $u = \frac{abm}{pz} = \frac{df}{z} =$

$$\frac{df}{-\frac{f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f^2}{4} + cf\right)}} = \frac{d}{c}\left(\frac{f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f^2}{4} + cf\right)}\right)$$

(VI *n.*° 193 *Alg.*), nel secondo $u = \frac{df}{\frac{f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f^2}{4} - cf\right)}}$

$= \frac{d}{c}\left(\frac{f}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{f^2}{4} - cf\right)}\right)$, e nel terzo $u = \frac{abm}{cp}$,
osservo, quando simili valori siano $> a$, e quando non siano tali. Nel primo di questi casi si avrà evidentemente la soluzione del Problema co' metodi del paragrafo presente, nel secondo con i metodi degli altri (*prec.*[i] I, II, III).

44. *Scol.* 5.° I. Vogliasi ora determinare a che serva la seconda radice $-$ FQ (Fig. 46), Am (Fig. 47). Prolungata perciò nella (Fig. 46) la BA al disotto, si tiri, fino ad incontrarla, da Q la Qm parallela alla AF, e si uniscano i punti D, m con la Dm; nella (Fig. 47) poi si conduca pei punti D, m, la em. Da ciò avremo sì nell' un caso che nell' altro il triangolo Ame tale che Ame : ABC : : $m : p$; e frattanto la Am uguaglia la lunghezza dell' altra radice nelle Equazioni del (I, II. *n.* 43). Dunque l' indicata seconda radice serve a formare l' accennato triangolo Ame, triangolo, il quale in area è uguale evidentemente al triangolo AME, ed il quale è nella (Fig. 46) affatto esterno al triangolo dato ABC, non affatto nella (Fig. 47).

II. Avvertasi, che come si pone positivo il triangolo ABC, così risulta positivo sempre non solo il triangolo AME, ma ancora l' altro Ame. Il triangolo AME risulta sempre tale, perchè, siccome si considerano positive le rette AC, AB, perciò deggion-

si prendere positive eziandio le AE, AM; il triangolo poi *Ame* nella (Fig. 47) è positivo per la stessa ragione, e nella (Fig. 46) è tale, perchè tanto la *Ae*, come la *Am* sono rapporto alle AC, AB di valor negativo, onde deggionsi scrivere $-Ae$, $-Am$; lo stato di questo triangolo *Ame* è simile a quello dell'area accennata nel (III. *n.*° 8).

III. Supposto nel (IV. *n.* 43) $\frac{ben}{dp}=g$, onde si abbia rapporto alla (Fig. 50) l'Equazione $z^2-gz=cg$, vedremo agevolmente, che se nel caso del (II.*n.*° 43) si abbia tanto $\frac{f}{4}$, come $\frac{g}{4}<c$, ossia tanto *am*, come $en<\frac{4cdp}{b}$; allora la soluzione di questo Problema è impossibile.

Fig. 52.

45. *Esem.* 14.° Dato un triangolo ABE ridurlo ad un'altro AMN tale, che AM = AB, MN = BC, e l'area AMN = ABC.

Sol. Sia $AC=a$, $AB=b$, $BC=c$, $AN=x$, e abbassate le perpendicolari BD, MP, sia $BD=d$, $AD=e$, $MP=y$. Ciò posto, poichè si ha $b^2=d^2+e^2$, $DC=a-e$, sarà $c^2=d^2+a^2-2ae+e^2=d^2+a^2-2ae+b^2-d^2$, e però $e=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$, onde $d^2=b^2-e^2=b^2-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$, e quindi $d=\frac{1}{2a}\sqrt{(2(b^2+c^2)a^2-(b^2-c^2)^2-a^4)}$ e finalmente $\frac{ad}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{(2(b^2+c^2)a^2-(b^2-c^2)^2-a^4)}$. Ora quello, che si è detto presentemente del triangolo ABC, si dice in egual modo dell'altro AMN: dunque sarà ancora $\frac{xy}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{(2(b^2+c^2)x^2-(b^2-c^2)^2-x^4)}$; ma per le condizioni del Quesito deve essere $\frac{ad}{2}=\frac{xy}{2}$.

Dunque avendosi $\frac{1}{4}\sqrt{(2(b^2+c^2)a^2-(b^2-c^2)^2-a^4)}=$

$\frac{1}{4} \surd (2(b^2+c^2)x^2-(b^2-c^2)^2-x^4)$, otterremo $x^4-2(b^2+c^2)x^2=a^4-2(b^2+c^2)a^2$, e sciogliendo questa Equazione si avrà $x=\pm\surd((b^2+c^2)\pm\surd((b^2+c^2)^2-2(b^2+c^2)a^2+a^4))$ (n.° 280. *Alg.*) $=\pm\surd((b^2+c^2)\pm(b^2+c^2-a^2))$. Quattro quindi si vede essere i valori della x, cioè $a, -a, \surd(2(b^2+c^2)-a^2), -\surd(2(b^2+c^2)-a^2)$. Ora i primi due non ci danno che lo stesso triangolo dato ABC posto o a destra del punto A, e al disotto della retta AC, mentre si faccia $x=a$, ed

$y=+\frac{1}{2x}\surd(2(b^2+c^2)x^2-(b^2-c^2)^2-x^4)$, ovvero posto a destra di A, e sotto della AC, quando ritenuto $x=a$, facciasi $y=-\frac{1}{2x}\surd(2(b^2+c^2)x^2-(b^2-c^2)^2-x^4)$;

oppure il triangolo medesimo collocato alla sinistra di A, e sopra AC, mentre si ponga $x=-a$, ed

$y=-\frac{+1}{2x}\surd(2(b^2+c^2)x^2-(b^2-c^2)^2-x^4)$, o collocato alla sinistra di A, e sotto AC, quando conservato

$x=-a$ pongasi $y=-\frac{1}{2x}\surd(2(b^2+c^2)x^2-(b^2-c^2)^2-x^4)$.

Dunque dagli indicati valori $a, -a$ non venendo determinato triangolo di forma diversa dalla forma del dato, il Problema verrà sciolto dagli altri due $\surd(2(b^2+c^2)-a^2)$, $-(\surd(2(b^2+c^2)-a^2)$. Per determinare i luoghi geometrici; applico al punto B perpendicolare alla BA la BE=BC=c, condotta l'ipotenusa AE=$\surd(b^2+c^2)$, tiro a questa perpendicolare dal punto E la EF=AE, conduco la AF=$\surd(2(b^2+c^2))$, descrivo su di essa AF il semicerchio AGF, e con centro F, raggio = AC=a segnato l'archetto G, col raggio AG, e centro A taglio sulla AC la retta AN; sarà questa evidentemente =$\surd(2(b^2+c^2)-a^2)$; facendo la stessa sezione nel prolungamento a sinistra di A della stessa CA, si avrà la retta =$-\surd(2(b^2+c^2)-a^2)$.

Siccome poi i lati AM, NM del triangolo, che si cerca, sono noti, formo con le regole conosciute un tale triangolo, ed avrò così risolto il Problema. Vedesi quì pure, che anche il triangolo AMN può ricevere quattro posizioni diverse, secondo la diversa combinazione de' segni ne' valori delle x, y.

Quantunque nella $\sqrt{(2(b^2+c^2)-a^2)}$, il termine $-a^2$ sia negativo; pure il valore del radicale sarà sempre reale, e però il Problema sempre solubile. Imperciocchè per la natura de' triangoli si ha $b+c>a$, e però $b^2+c^2>a^2-2bc$; ma $b^2+c^2>2bc$ (VII $n.°$ 219 *Alg.*). Dunque dovrà essere $2(b^2+c^2)>a^2$, e però ec.

46. *Esempio* 15.° Tra i due lati AB, AC del Fig. 53 triangolo ABC isoscele, condurre una retta MN tale, che uniti i due punti di mezzo D, E delle rette BC, MN con la DE, risulti questa DE perpendicolare alla MN, e tale inoltre che il nuovo triangolo MAN stia al primo BAC in una data ragione di $m:n$.

Sol. Supposta già tirata la retta MN, che si domanda, dal punto D si conducano ai lati AB, AC le perpendicolari DH, DL, ed ai punti M, N le DM, DN; e si ponga $AB=AC=a$, $AH=AL=c$, $DH=DL=d$, $AM=x$, $AN=y$. In conseguenza di ciò avendosi $MH=x-c$, $NL=c-y$, sarà $\overline{DM}^2=d^2+(x-c)^2$, $\overline{DN}^2=d^2+(c-y)^2$; ma per essere E punto di mezzo della MN, e per essere la DE a lei perpendicolare si ha $DM=DN$; dunque risultando $d^2+(x-c)^2=d^2+(c-y)^2$, avremo $x^2-2cx=y^2-2cy$. Ora la seconda condizion del Problema ci dà $xy:a^2::m:n$, e però $y=\frac{ma^2}{nx}$. Dunque sostituendo questo valore nella $x^2-2cx=y^2-2cy$, otterremo $x^4-2cx^3+\frac{2ma^2c}{n}x-\frac{m^2a^4}{n^2}=0$. Quest' ultima Equazione risultataci si riduce alla

forma $\left(x^2 - \frac{ma^2}{n}\right)\left(x^2 - 2cx + \frac{ma^2}{n}\right) = 0$, e però si verifica tanto se sia $x^2 - \frac{ma^2}{n} = 0$, come se si abbia $x^2 - 2cx + \frac{ma^2}{n} = 0$. Dunque ridottasi la precedente Equazione di 4.° grado alle due ora accennate di 2.°, ne avremo la costruzione, ed avremo però la richiesta soluzione del Problema, costruendo con i noti metodi (*Cap. prec.*) le altre due Equazioni ottenute di 2.° grado. Avendosi poi da esse $x = \pm\sqrt{\frac{ma^2}{n}}$, $x = c \pm \sqrt{\left(c^2 - \frac{ma^2}{n}\right)}$, risulterà corrispondentemente ai primi valori $y = \frac{ma^2}{nx} =$

$$\frac{ma^2}{\pm n\sqrt{\frac{ma^2}{n}}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{ma^2}{n}} \times \sqrt{\frac{ma^2}{n}}}{\sqrt{\frac{ma^2}{n}}} = \pm\sqrt{\frac{ma^2}{n}}, \text{ e}$$

in corrispondenza ai secondi $y = \frac{ma^2}{n\left(c \pm \sqrt{(c^2 - \frac{ma^2}{n})}\right)}$

$= \sqrt{\left(c \mp \sqrt{\left(c^2 - \frac{ma^2}{n}\right)}\right)}$. Da questi valori finalmente apparisce, che il proposto Problema ammette quattro soluzioni, due corrispondenti ai valori $x = \pm\sqrt{\frac{ma^2}{n}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{ma^2}{n}}$, e due corrispondenti agli altri $x = c \pm \sqrt{\left(c^2 - \frac{ma^2}{n}\right)}$, $y = c \mp \sqrt{\left(c^2 - \frac{ma^2}{n}\right)}$. Rapporto ai primi due la MN riuscirà evidentemente parallela alla base BC, e dipendentemente dal valore $+\sqrt{\frac{ma^2}{n}}$ essa anderà

al disotto del vertice A del triangolo, e dipendentemente dal valore $-\sqrt{\frac{ma^2}{n}}$, dovrà essa cadere al disopra di A fra i due prolungamenti de' lati BA, CA, divenendo a questa MN sempre perpendicolare la retta condotta dal punto D al suo punto di mezzo. Rapporto poi agli altri due valori delle x, y, il Problema non ammetterà soluzione, se non se quando sia c^2 non $< \frac{ma^2}{n}$; che se si abbia $c^2 > \frac{ma^2}{n}$, allora la MN risulterà sempre inclinata verso la base, e conservando un egual lunghezza, ed inclinazione, piegherà verso B, quando si prenda $x = c + \sqrt{\left(c^2 - \frac{ma^2}{n}\right)}$, verso C, quando si faccia $x = c - \sqrt{\left(c^2 - \frac{ma^2}{n}\right)}$. Che se sia $c^2 = \frac{ma^2}{n}$, allora i secondi due valori della x divengono un solo uguale al primo $+\sqrt{\frac{ma^2}{n}}$.

47. *Esem.* 16.° Prolungati indefinitamente i due Fig. 54 lati BC, DC di un quadrato ABCD, il cui lato sia $= a$, condurre dal punto A una retta AN tale, che la sua porzione MN compresa fra i supposti due lati prolungati sia di una data lunghezza b.

Sol. Posta la retta DN$=x$, per la somiglianza de' triangoli ADN, MCN avremo $x : \sqrt{(x^2+a^2)} :: x+a : b$, e però $bx = (x+a)\sqrt{(x^2+a^2)}$, e tolti i radicali, $x^4+2ax^3+(2a^2-b^2)x^2+2a^3x+a^4=0$. Ascendendo questa Equazione al quarto grado, avrà quattro radici, e quattro linee difatti si possono condurre dal punto A, le quali soddisfanno al Quesito; tali essendo appunto le rette MN, M'N', M''N'', M'''N'''. In conseguenza di ciò DN, DN', DN'', DN''' saranno i

quattro valori della x; denominati essi pertanto x', x'', x''', x'''', cosicchè $DN = x'$, $DN' = x''$, $DN'' = x'''$, $DN''' = x''''$, osservo che si ha $x' : a :: a : BM = \frac{a^2}{x'}$, ma a cagione di ABCD quadrato, e della $MN = M'N'$ risulta $AM = AN'$, e però $BM = DN' = x''$: dunque sostituendo otterremo $x'' = \frac{a^2}{x'}$, e però $x' x'' = a^2$; nella medesima maniera si truova $x''' x'''' = a^2$. Siano ora le x', x'' radici della Equazione $x^2 + m'x + n' = 0$, e le x''', x'''' radici dell'altra $x^2 + m''x + n'' = 0$: a cagione di $n' = x'x''$, e di $n'' = x'''x''''$, avendosi, $n' = a^2 = n''$, tali Equazioni diverrano $x^2 + m'x + a^2 = 0$, $x^2 + m''x + a^2 = 0$, e dalla moltiplicazione de' loro primi membri il prodotto $x^4 + (m' + m'')x^3 + (2a^2 + m'm'')x^2 + a^2(m' + m'')x + a^4$, che risulta, dovendo essere identico col primo membro dell' Equazione precedentemente ottenuta, avremo $m' + m'' = 2a$, $2a^2 + m'm'' = 2a^2 - b^2$, $a^2(m' + m'') = 2a^3$. Da queste Equazioni ricavasi $m' + m'' = 2a$, $m'm'' = -b^2$; dunque le m', m'' dovranno essere radici della Equazione $m^2 - 2am - b^2 = 0$, e quindi ottenendosi $m' = a + \sqrt{(a^2 + b^2)}$, $m'' = a - \sqrt{(a^2 + b^2)}$, l'Equazione risultataci dalle condizioni del Problema rimarrà così spezzata nelle due $x^2 + (a + \sqrt{(a^2 + b^2)})x - b^2 = 0$, $x + (a - \sqrt{(a^2 + b^2)})x - b^2 = 0$: Determino ora coi noti metodi le rette che uguagliano le due espressioni $a + \sqrt{(a^2 + b^2)}$, $a - \sqrt{(a^2 + b^2)}$, ritenute per esse le denominazioni stabilite, costruisco le Equazioni $x^2 + m'x - b^2 = 0$, $x^2 + m''x - b^2 = 0$ (*Cap. prec.*), e venendo così evidentemente costruita l' altra $x^4 + 2ax^3 + (2a^2 - b^2)x^2 + 2a^3x + a^4 = 0$, avremo così risolto il proposto Problema.

48. *Scol.* 6.° Nel terminar questo Capo gioverà l' aggiungere rapporto ai Problemi Geometrici le seguenti riflessioni.

I. Ogniqualvolta le condizioni di un Problema

sian tali, che per esse l' incognita, che si cerca, può ricevere più valori tra loro diversi; ed ogniqualvolta l' Equazione esprimente il rapporto, che ha uno di questi diversi valori con le quantità date del Problema, uguaglia nella forma perfettamente l'altra, o le altre Equazioni, che esprimono i rapporti con le stesse quantità date degli altri valori; in tal caso io dico, che l' Equazione, la quale ottiencsi nel cercare uno de' valori accennati, dovrà essere, generalmente parlando, di secondo grado, se essi siano due; di terzo, se siano tre; di quattro, se quattro ec. Chiamato difatti x il valore, che si domanda, poichè la forma dell' Equazione, che esprime il rapporto del supposto valore x con le quantità date, è per la ipotesi identica con la forma di ciascuna delle altre Equazioni, che esprimono i rapporti degli altri valori con le quantità medesime, e poichè la lettera x è affatto indifferente a rappresentare uno degli accennati valori, piuttosto che un altro, ne segue evidentemente, che dovrà rappresentare ciascuno di essi; e ciascuno di essi per conseguenza dovrà risultarci, mentre l' Equazione ottenuta si risolva. Ora l' Equazione, che sciolta somministra per x due valori, è l' Equazione di 2.° grado (*n.*° 225. *Alg.*), quella, che ne, somministra tre è l' Equazione di 3.° grado (II. *n.*° 297. *Alg.*), l' Equazione di 4.° quella, che ne dà quattro (*n.*° 303. *Alg.*), ec. Dunque poste le precedenti condizioni, l' Equazione ottenuta sarà, come abbiamo enunciato, di 2.°, di 3.°, di 4.° grado ec., secondo che due, tre, quattro, ec. sono i valori, che può acquistare l' incognita.

II. *Esem.* 17.° Tagliata per esempio sopra la retta indefinita ZV la parte AB, se ne voglia segare, cominciando dal punto A un' altra parte AM tale, che questa AM stia geometricamente alla differenza BM, che esiste tra lei, e la porzion prima AB, come essa BM sta alla AB. Posta la

Fig., 55

parte $AB = a$, osservo poter essere l'altra porzione AM, che si cerca, minore in AM', e maggiore in AM'' della AB, esistendo sempre la proporzione AM : BM : : BM : AB. Dunque nel presente esempio l' incognita può per le condizioni del Problema acquistar due valori: chiamato pertanto x' il primo di essi, ossia la retta AM', e chiamato x'' il secondo, cioè AM'', avremo rapporto a quello $x':a-x'::a-x':a$, e però $(a-x')^2 = ax'$, e rapporto a questo $x'':x''-a::x''-a:a$, e però $(x''-a)^2 = ax''$. Ora essendo la quantità $(a-x')^2$ della stessa forma dell' altra $(x''-a)^2$, la forma dell' Equazione $(a-x')^2 = ax'$ esprimente la relazione della $x' = AM'$ con la $a = AB$ è uguale perfettamente alla forma della Equazione $(x''-a)^2 = ax''$ esprimente il rapporto della $x'' = AM''$ con la $a = AB$. Dunque, posto invece della x' la x, poichè questa lettera x è per se stessa affatto indifferente a rappresentare la $x' = AM'$, ovvero la $x'' = AM''$, ne segue che sciogliendo l' Equazione $(a-x)^2 = ax$ identica all'altra $(x-a)^2 = ax$, dovremo per x ottenere due valori, cioè i due x', x'', e per conseguenza dovrà essa Equazione, come abbiamo precedentemente osservato, ascendere al secondo grado.

III. Vogliasi ora sciorre l' esposto Problema (*prec.* II) ponendo che la proporzione debba essere aritmetica, cioè che debba essere AM.MB:MB.AB. Ancora in questa ipotesi la AM potendo essere maggiore, e minore della AB, potrà acquistar due valori, cioè i due AM', AM'', e ritenuto chiamarsi x' il primo, x'' il secondo, avremo in corrispondenza $x'.a-x':a-x'.a$, $x''.x''-a:x''-a.a$. Ora queste due proporzioni ci danno $2(a-x') = a+x'$, $2(x''-a) = a+x''$, ed a cagione della quantità $2(a-x')$ di forma diversa dalla forma della $2(x''-a) = -2(a-x')$, tali due Equazioni esprimenti rispettivamente il rapporto delle x', x'' con la a sono anch'esse di forma tra loro diversa. Dunque essen-

do la x' dipendente dalla a in un modo diverso da quello, con cui ne dipende la x'', ne segue, che si potrà dalla a determinare il valore di ciascuna di queste quantità x', x'' indipendentemente dall' altra, e per conseguenza l' Equazione, da cui dipende il valore x', non dovendo somministrare che questo solo, sarà di primo grado, e così sarà di primo l'altra da cui dipende il valore x''.

IV. Il precedente Problema, tanto nella ipotesi del (*prec.* II), come in quella del (*prec.* III), può dividersi in due, l' uno che riguarda la ricerca della retta AM, e si annuncia dicendo: dividere una retta data AB in media, ed estrema ragione geometrica (*prec.* II), aritmetica (*prec.* III), ossia per modo che nel primo caso si abbia $\div$AM':M'B:AB, e nel secondo $\div$ AM'.M'B.AB. L'altro Problema riguarda la ricerca della AM'' sotto l' enunciato: aggiungere alla data AB una retta BM'' tale, che tutta la risultante AM'' stia geometricamente (*prec.* II), aritmeticamente (*prec.* III) alla parte aggiunta BM'', come questa sta alla data AB. Ora la determinazione della AM' nel (*prec.* II) porta necessariamente seco la determinazione ancora della AM'', e viceversa, non accadendo ciò punto nel (*prec.* III.). Dunque, mentre venga proposto uno de' Problemi ora accennati, dovremo, nello scioglierlo, cadere, nel caso del (*prec.* II), a risolvere anche l' altro, e quindi ottenere per esso un' Equazione di 2.° grado; ma nel caso del (*prec.* III) la soluzione dell' uno anderà separata dalla soluzione dell' altro, e non si otterrà quindi in corrispondenza, che un Equazione di 1.° grado.

V. Quanto si è detto nei (*prec.* I, II) ci dimostra il perchè nel risolvere i Problemi de' (*n.* 34, ec. 43.) sonosi ottenute delle Equazioni di grado 2.°, e sono queste risultate di 4.° grado ne' Problemi de' (*n.*^{i} 45, 46, 47). Inoltre dai (*prec.* I, II, IV) si vede il perchè alcune volte sciogliendo un

un Problema dato, cadiamo a risolverne contemporaneamente un' altro, o più altri diversi dal primo; accadendo ciò ogniqualvolta le Equazioni esprimenti i rapporti delle rispettive incognite con le quantità date sono ne' varii citati Problemi di forma eguale. Così è avvenuto nel Quesito del (*n.*° 41), ove però giova il riflettere, che chiamato z' il lato del triangolo che si domanda (*n.*° 41), e z'' il lato dell'altro triangolo (I. *n.*° 42), la forma dell' Equazione esprimente il rapporto del valore z' con la quantità data a non uguaglia già la forma dell' Equazione esprimente il rapporto con la stessa a del valore z'', essendo quella $z'(z'-a) = z'^2 - a \times z' = a^2$, e questa $z''(z''+a) = z''^2 + a \times z'' = a^2$, ma uguaglia la forma della Equazione, che esprime la relazione con la a del valore stesso z'' preso negativamente, essendo essa $-z''(-z''-a) = (-z'')^2 - a \times -z'' = a^2$. D' onde apparisce, che le due radici della $z^2 - az = a^2$ sono z', $-z''$.

Dai (*prec.* I, III, IV.) finalmente apparisce il perchè in alcuni Problemi i diversi valori, che può ricevere l' incognita, vengono somministrati in Equazioni separate di primo grado, avendo ciò luogo sempre, quando le Equazioni, che esprimono il rapporto degli accennati valori con le quantità date sono di forma tra loro diversa. Il Problema del (*n.*° 24), presa per incognita quella porzione della ABD, che dal punto B va al punto d' intersecazione della stessa ABD con la tangente richiesta, tal Problema, dissi, ammette due soluzioni, l' una nella determinazione della BD, l'altra nella determinazione della B*d*, queste soluzioni però abbiamo nei (I, II. *n.*° 24) veduto ottenersi separate fra loro per mezzo di due Equazioni ciascuna di 1.° grado; e la ragione di ciò si è, perchè, posto $BD = x'$, $Bd = x''$, le Equazioni, che esprimono il rapporto della x', e, quello della x'' con le rette date essendo in corrispondenza

Fig. 17

$x'(a-b)=bc$, $x''(a+b)=bc$, hanno una forma tra loro diversa. Che se si voglia tener conto della direzione, e porre quindi negativa la Bd, perchè in direzione opposta alla direzione della BD già posta positiva; allora si dovrà porre negativa anche la BL, perchè in direzione contraria alla direzione della AG positiva, e fatto quindi $-BD=-x''$, $-BL=-b$, poichè si ha $Ad=AB-Bd=c-x''$, ed $AG:-BL::Ad:-Bd$, ne verrà $a:-b::c-x'':-x''$, e però $x''(a+b)=bc$ Equazione uguale alla precedente nel caso, in cui si prescindeva dalle direzioni (II. *n.°* 24), e però di forma sempre diversa da quella della $x'(a-b)=bc$.

VI. Mentre si è nel (*prec.* I.) asserito, che, poste le condizioni ivi accennato, l' Equazione, che si ricerca, deve risultare di 2.°, di 3.°, ec. grado; abbiamo aggiunto, dover ciò accadere *generalmente parlando*; imperciocchè sonovi de' casi particolari, e questi allorchè i valori della incognita sono razionali, ne' quali quantunque l' incognita medesima abbia due, o più valori, che si dovrebbero insieme unire in una sola Equazione, pure si possono ottenere separati fra loro, e quindi ottengonsi in corrispondenza tante Equazioni, quanti sono i valori medesimi, tutte di 1.° grado. Conduca difatti un Problema ad un' Equazione per esempio di 2.° grado, che in generale supporrò essere $x^2 \pm Ax = \pm B^2$; sciolta questa ne vengono i due valori $x' = \mp\frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} \pm B^2\right)}$, $x'' = \mp\frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{4} \pm B^2\right)}$, e posto $\sqrt{\left(\frac{A^2}{4} \pm B^2\right)} = C$, si ottiene $x' = \mp\frac{A}{2} + C$, $x'' = \mp\frac{A}{2} - C$, e però $\left(x' \pm \frac{A}{2}\right) = C$, $-\left(x'' \pm \frac{A}{2}\right) = C$, ma essendo la quantità $x' \pm A$ di forma diversa dalla forma del-

la $-(x''\pm A)$, sono tra loro di forma diversa ancora le due ottenute Equazioni esprimenti i rapporti delle x', x'' con le A, C. Dunque ogniqualvolta si cerchi la relazione di uno de' valori, x', x'' con le A, C, potrà questa pei (*prec.* III, IV) ottenersi espressa da un' Equazione non contenente l'altro valore, e però di 1.° grado. Ora se le x', x'' sono razionali, allora è razionale eziandio il valore $C=\sqrt{\left(\frac{A^2}{4}\pm B^2\right)}$, ed essendo questo C razionale può agevolmente venire considerato tra le quantità date per la soluzion del Quesito, poichè sono appunto le quantità, e i risultati commensurabili, che si prendono principalmente in considerazione. Dunque allor quando i valori x', x'' sono commensurabili, potrà facilmente succedere, che i due, o più valori dell' incognita risultino fra loro disgiunti in altrettante Equazioni di grado 1.°. Prendasi per esempio il Problema del (*n.°* 36), per la soluzione del quale si è avuto $x^2-\frac{2c^2}{a}x+c^2=0$, e però $x=\frac{c^2}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2}-c^2\right)}$. A cagione di $c^2-a^2=b^2$ avendosi ivi $\sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2}-c^2\right)}=\frac{c}{a}\sqrt{(c^2-a^2)}=\frac{cb}{a}$, risulta $x=\frac{c^2}{a}\pm\frac{cb}{a}$, e quindi $x'=\frac{c^2}{a}-\frac{cb}{a}$, $x''=\frac{c^2}{a}+\frac{cb}{a}$, onde si ha $-\left(x''-\frac{c^2}{a}\right)=\frac{cb}{a}$, $\left(x''-\frac{c^2}{a}\right)=\frac{cb}{a}$. Dunque essendo queste due Equazioni di forma diversa, se nel cit.° Problema si cerca il rapporto del valore per esempio x' con le quantità $\frac{c^2}{a}$, $\frac{cb}{a}$ corrispondenti alle $\frac{A}{2}$, C del precedente caso generale, potremo ottenere in corrispon-

denza un'Equazione non contenente l'altro valore x'', e però di 1.° grado; lo stesso si dice del valore x''. Condotta difatti nella (Fig. 39) dal punto D cognito la perpendicolare DC, posto AP$=x'$, e ritenute le altre denominazioni del (n.° 36), avremo $a:c::c:AC=\frac{c^2}{a}$, $a:c::b:DC=\frac{bc}{a}$; ma tirata la MC, i due triangoli MDC, MPC essendo rettangoli in D, P, ed avendo i cateti MD, MP fra loro uguali, e l'ipotenusa MC comune, fan sì che CD$=$CP. Dunque avendosi AP$=$AC $-$ CP, sarà $x'=\frac{c^2}{a}-\frac{bc}{a}$, Equazione la quale non somministra che il valore x', ed è quindi di 1.° grado. Posto AQ$=x''$, se si fosse cercato nella stessa guisa questo valore, sarebbesi in egual modo ottenuta l'Equazione di 1.° grado $x''=\frac{c^2}{a}+\frac{bc}{a}$.

Si moltiplichi numeratore, e denominatore del valore $x'=\frac{c^2}{a}-\frac{bc}{a}=\frac{c(c-b)}{a}$ per $c+b$, e numeratore, e denominatore dell'altro $x''=\frac{c^2}{a}+\frac{bc}{a}=\frac{c(c+b)}{a}$ per $c-b$ ne verrà $x'=\frac{c(c^2-b^2)}{a(c+b)}$, $x''=\frac{c(c^2-b^2)}{a(c-b)}$, e però a cagione di $c^2-b^2=a^2$, avremo $x'=\frac{ac}{c+b}$, $x''=\frac{ac}{c-b}$. In conseguenza di queste riduzioni essendosi pei valori x', x'' ottenute delle altre espressioni fra loro diverse, ne segue, che se fra le rette della (Fig. 39) si eseguiranno dei raziocinii, e dei rapporti, i quali conducano alle espressioni accennate; anche in allora si otterranno i valori x', x'' disgiunti fra loro per due Equazioni di grado 1.° Riguardo difatti al valore x', osserviamo aversi $a:b::x':PM=MD=\frac{bx'}{a}$,

ma $a : c :: a - x' : MD$; dunque sarà $x' = \frac{ac}{c+b}$:
nel modo stesso si trova $x'' = \frac{ac}{c-b}$. Dalla osservazione fatta nel presente caso particolare apparisce, che anche in generale, ogniqualvolta le espressioni $x' = \mp \frac{A}{2} + C$, $x'' = \mp \frac{A}{2} - C$ possono ricevere, siccome le precedenti, altre forme diverse, sempre i raziocinii, e le relazioni, che conducono a simili forme potranno somministrare i valori dell' incognita separati fra loro.

Ottenuto il valore $x' = \mp \frac{A}{2} + C$, mentre si sappia essere $C = \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} \pm B^2\right)}$, rimarrà tosto determinato anche il valore x'', bastando perciò cambiare il segno alla C, ed avendosi così $x'' = \mp \frac{A}{2} - C$. Nel supposto caso particolare ritrovato il valore $x' = \frac{c^2}{a} - \frac{bc}{a}$, poichè si vede essere $\frac{bc}{a} = DC$, ed insieme $DC = \sqrt{(\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2)} = \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2} - c^2\right)}$, onde $\frac{bc}{a} = \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2} - c^2\right)}$ diremo esistere realmente un altro valore della x, ed essere questo $x'' = \frac{c^2}{a} + \frac{bc}{a}$. Che se si fosse determinato uno di tali valori espresso con l'altra forma sovraindicata, per esempio il valore $x' = \frac{ac}{c+b}$; allora non sarà così facile il dedurre da questo, e determinare l' altro valore

$x'' = \frac{ac}{c-b}$; converrebbe perciò ridurre prima l' espressione $\frac{ac}{c+b}$ all' altra $\frac{c^2}{a} - \frac{bc}{a}$ dicendo $\frac{ac}{c+b} = \frac{a^2c}{a(c+b)} = \frac{c(c^2-b^2)}{a(c+b)} = \frac{c(c-b)}{a} = \frac{c^2}{a} - \frac{bc}{a}$, e poscia eseguire la precedente osservazione , che $\frac{bc}{a} = \sqrt{\left(\frac{...}{a^2} - c^2\right)}$. In fine osservo, che dal valore $x' = \frac{ac}{c+b}$ ottienesi l' altro $x'' = \frac{ac}{c-b}$ cambiando il segno alla b, oppure alla c, e non si ottiene cangiandolo alla a; e perchè ciò ? Per rispondere a questa domanda, si rifletta, che essendo i due valori x', x'' contenuti nella espressione $\frac{c^2}{a} \pm \frac{bc}{a}$, dall' uno si ricava l' altro, mentre nel tempo stesso si cambi il segno del termine $\frac{bc}{a}$, e rimanga lo stesso quello del termine $\frac{c^2}{a}$; ora questo cambiamento riguardo al termine $\frac{bc}{a}$, e questa simultanea permanenza riguardo all' altro $\frac{c^2}{a}$ ha bensì luogo mentre si muti il segno della b , ovvero della c , ma non già mentre si cangi il segno della a. Dunque ec.

VII. Nel Problema del ($n.^o$ 26) possono aver successivamente luogo infiniti casi diversi ; per la loro determinazione però non si ottengono in corrispondenza che tante Equazioni tutte di 1.° grado, e ciò per la solita ragione dei (*prec.* III, IV, V). L'andamento poi costante , che hanno simili Equazioni, per cui possono venire assoggettate ad una

determinata legge, fa sì che possono esse tutte venire espresse dalle formole generali del (VI. *n.*° 26).

VIII. Osservando i Problemi de' (*n.*° 25, 43), vedesi che la soluzione loro completa non viene già compresa, siccome quella degli altri sovraesposti Problemi, in una sola Equazione, ma bensì in due aventi per incognite due rette tra loro diverse; e la ragione di questo vedesi dipendere da ciò, che il valore dell' area ivi proposta a dividersi è determinato non da una sola, ma da più rette fra loro diverse, ciascuna delle quali essendo, per la limitazione della figura, supposta di una lunghezza limitata, non può somministrare il valore della incognita, che sotto un determinato valore della ragione $m:n$.

CAPO V.

Delle Equazioni indeterminate a due variabili applicate alla Geometria, e delle linee del 1.° Ordine.

49. *Esem.* 18.° Data la retta $AB=2g$ formare su d'essa un triangolo rettangolo, di cui la AB sia l'ipotenusa. Fig. 56

Sol. Sia AMB il triangolo che si domanda rettangolo in M; dal vertice si abbassi sulla AB la perpendicolare MP, e facciamo $AP=x$, $PM=y$; ne verrà $AP:PM::PM:PB$, ossia $x:y::y:2g-x$, e però $y^2=2gx-x^2$. Ora dalle condizioni del Problema non possiamo ricavare altra Equazione, e frattanto l' ottenuta ha due incognite x, y; dunque ripetendo quanto si disse nel (*n.*° 147. *Alg.*) il Problema proposto si troverà essere indeterminato, ed avrà perciò un' infinità di soluzioni. Supponghiamo pertanto che la x divenga suc-

cessivamente $= Ab$, Ac, AP, Ad, Ae, ec., sostituendo questi valori nella $y = \sqrt{(2gx - x^2)}$, otterremo
$y = \sqrt{(2g \times Ab - Ab^2)}$, $y = \sqrt{(2g \times Ac - Ac^2)}$,
$y = \sqrt{(2g \times AP - AP^2)}$, $y = \sqrt{(2g \times Ad - Ad^2)}$,
$y = \sqrt{(2g \times Ae - Ae^2)}$, ec.,
e determinate coi metodi accennati le rette corrispondenti a questi valori della y, s' innalzino esse perpendicolarmente dalle estremità b, c, P, d, e, ec. delle x, e tali siano le bh, ck, PM; dm, en, ec. Ciò fatto, dagli estremi h, k, M, m, n, ec. conducansi le rette hA, hB; kA, kB; MA, MB; mA, mB; ec.; si verranno così a formare tanti triangoli AhB, AkB, AMB, AmB, ec. rettangoli in h, k, M, m, ec. e avremo per conseguenza tante soluzioni del Problema proposto.

Ora queste non sono che alcune delle soluzioni; affine di averle tutte, si supponga che la x vada continuamente acquistando tutti i valori possibili cominciando dallo zero all' infinito, e che questi si vadano successivamente sostituendo nella $y = \sqrt{(2gx - x^2)}$, finchè la x è positiva, ed è non $> 2g$, la y essendo reale, anderà acquistando successivamente altrettanti valori, e le rette a questi corrispondenti applicate perpendicolarmente all' estremità di ciascuna x, ci daranno co' loro estremi tutte le soluzioni richieste. Ma variando continuamente il valore della x, e però quello della $2g - x$ varia continuamente anche il valore dell' area $x(2g - x) = y^2$; e variando continuamente il valor del quadrato y^2, varia continuatamente eziandio il valore del suo lato y. Dunque ai valori continuati della x corrispondendo valori della y continuati, verranno questi già descritti a costituire una linea continuata, la descrizion della quale ci darà per conseguenza la soluzione completa del nostro Problema. Descrivasi pertanto sulla AB, come su diametro la circonferenza AMBN. Da qualunque punto M di questa si abbassi la perpendicolare MP, e

Fig. 57

si conducano le rette MA, MB, noi abbiamo sempre per le proprietà del circolo AP : PM : PM : PB, e l'angolo AMB retto. Dunque la circonferenza descritta soddisfarà compiutamente a quanto è stato richiesto.

50. *Scol.* 1.° Ogniqualvolta giungiamo ad una sola Equazione con due incognite, il Problema, siccome nel caso precedente, riescendo indeterminato, ammetterà generalmente infinite soluzioni, e quella linea, la quale, come il circolo precedente, passa per tutti gli estremi delle y, essa scioglierà pienamente il Problema. Ora la forma, e la natura di questa linea è chiaro che dipende totalmente dalla varia lunghezza, e posizion dello y; ma questa varia lunghezza, e posizion delle y non può che dipendere dalla Equazione indeterminata, a cui conduce il Problema. Dunque anche la nostra linea dipenderà totalmente dalla Equazione suddetta, e potrem dire per conseguenza, che viene rappresentata, ed espressa da una tale Equazione.

51. *Cor.* Poichè adunque un' Equazione indeterminata fra due incognite ci dà non solo la soluzione del Problema corrispondente, ma ci somministra di più la forma, e la natura di una linea; quindi è che i Matematici spingendo ulteriormente le loro considerazioni fanno uso di simili Equazioni non tanto per la soluzione degli accennati Problemi, ma molto più per determinare l'indole, e le proprietà delle linee diverse; e affine di ciò eseguire han convenuto di assegnare dapprima le seguenti denominazioni.

52. *Def.* 1. Sia perciò un' Equazione indeterminata fra le x, y, e la (Fig. 58) rappresenti la linea, che le corrisponde; sulla retta data ZV prendansi cominciando da A i successivi valori della x (*n.*° 49), e da questi si conducano perpendicolarmente le rette che uguagliano i diversi valori del- Fig. 58

la y. Giacchè questi valori x, y sono nella Equazione indeterminati, e vanno nella figura determinandosi successivamente, continuamente variando; esse x, y, piuttosto che incognite, sogliونsi chiamare *indeterminate*, o *variabili*. Le rette poi AP, Ap, ec., che principiando da A prendonsi sulla ZV, e che esprimono i valori della x, chiamansi *Ascisse*, dicendosi *Linea*, o *Asse* delle *Ascisse* la ZV; e le rette PM, pm, ec., che esprimendo i valori della y si conducono parallele fra loro dall' estremità di ciascun Ascissa fino ad incontrare la supposta mMANn, si chiamano *ordinate*, nominandosi *Linea*, od *Asse delle ordinate* la retta XY tirata pel punto A a queste parallela.

Poste pel (IV. *n.*° 5) *positive* le ascisse che scorrono alla destra del punto A, e positive le ordinate che si estendono al disopra della ZV, saranno *negative* tanto le ascisse, come le ordinate, mentre si estendano quelle alla sinistra del punto A, e queste al disotto della ZV.

II. Col nome di *coordinate* intendiamo un ascissa qualunque per esempio la AP congiunta alla sua ordinata corrispondente PM.

III. Affine di prendere la cosa o più vantaggiosamente alle circostanze, o più generalmente pongono i Geometri l' angolo, che fanno tra loro le coordinate, non già sempre retto, come nelle precedenti osservazioni, ma lo pongono ancora obbliquo, e di una determinata grandezza, oppure lo considerano qualunque, sia esso retto, od obbliquo, purchè rimanga costante rapporto a tutte le coordinate, onde le ordinate risultino tutte fra loro parallele (*prec.* I). Se poi l'indicato angolo si faccia retto, allora le coordinate diconsi *rettangole*, od *ortogonali*, e si dicono esse *obblique*; mentre si ponga obbliquo l'angolo medesimo.

53. *Probl.* 11° Determinare **la linea**, che dipende dall' Equazione $ay = bx$.

Sol. Presa la ZV per linea di ascisse, e supposto Fig. 59
che esse incomincino dal punto A, potrei come nel
(*n.*° 49) attribuire alla x dei successivi valori, sostitui-
re questi nella $ay=bx$, condurre sotto l' angolo dato
delle coordinate, che per ora supporrò retto, ed all'
estremità di ciascun valore della x i valori cor-
rispondenti della y, e ciò fatto, le estremità del-
le ordinate ci darebbero la linea, che si domanda.
Ma in pratica essendo impossibile di tutti determi-
nare i valori continuati della x, e di condurre tut-
te le ordinate corrispondenti, quindi è che il me-
todo accennato non può giammai esibirci con esat-
tezza la linea richiesta, ed è perciò necessario il
ricorrere ad altro mezzo. L' Equazione medesima
$ay=bx$ facilmente ce lo somministra; imperciocchè
avendosi da essa $a:b::x:y$, osservo che la linea,
che si cerca, dev'esse tale, che qualunque ascissa x
abbia alla sua ordinata y la ragione costante di $a:b$.
Ora se sulla ZV prendiamo la porzione AD$=a$, dal
punto D innalziamo la perpendicolare DE$=b$, e pei
punti A, E conduciamo la retta indefinita MAN,
questa è appunto tale, che presa un'ascissa qua-
lunque AP$=x$, e tirata la corrispondente ordinata
PM, ci dà AD : DE :: AP : PM, ossia $a:b::x:$PM.
Dunque questa ordinata PM non potendo che esse-
re la y della proporzion precedente $a:b::x:y$.
e però della Equazione data $ay=bx$, ne viene, che
la descritta MAN sarà appunto la linea espressa
della Equazione $ay=bx$, ossia quella linea, che
passa per tutte le estremità delle y.

Non essendo la AMN che una retta, ne viene,
che una retta sarà la linea, che dipende dalla sup-
posta $ay=bx$.

54. *Scol.* 2.° Supponghiamo che nella $ay=bx$,
ossia $y=\frac{bx}{a}$ facciasi $x=0$, ne verrà $y=0$, dunque
nel punto A ove incominciano le ascisse, ed ove
per conseguenza la lunghezza della ascissa è zero,

anche l'ordinata sarà zero, e però il punto corrispondente della MAN essendo zero distante dalla linea ZV, dovrà cadere su di essa in A, come difatti succede, intersecandosi in tal punto le due rette ZV, MAN: vada ora la x aumentandosi, è chiaro che anche la $y = \frac{bx}{a}$ anderà corrispondentemente crescendo, e aumentandosi quella all'infinito, si aumenterà all'infinito anche questa. Dunque quanto più ci allontaniamo dal punto A verso V, tanto più si discostano fra di loro le MAN, ZV. Per determinare, che cosa succeda dalla parte delle ascisse negative, ponghiamo $-x$ in luogo del la x; risultando $ay = -\frac{bx}{a}$, vedesi che le ordinate, le quali estendonsi da A verso Z divengono negative, ed uguali in lunghezza corrispondentemente alle ordinate che esistono da A verso V; dunque quella porzione della MAN, che corrisponde alle ascisse negative, cioè la porzione AN, scorrerà al disotto della AZ, e sarà uguale alla porzione AM corrispondente alle ascisse positive. Tutto questo vedesi essere consentaneo alle proprietà che si conoscono della linea retta.

55. *Scol.* 3.° Da questo caso particolare passiamo a considerare l'Equazione generale indeterminata di 1.° grado, cioè la $ay = bx + c$, in cui i coefficienti a, b, c possono essere qualsivogliono, e positivi, o negativi, o zero.

Pel (II. *n.*° 17) si consideri la c moltiplicata per quella retta, che si pone $= 1$ (*n.*° 1), e supporremo, che in avvenire abbia sempre luogo una tale considerazione, ogniqualvolta vengano proposte delle Equazioni fra quantità geometriche, in cui siano disuguali le dimensioni dei termini, venendo queste in tal modo uguagliate dalla retta unità.

I. Cominciamo dal porre i coefficienti a, b, c positivi, e riduciamo la $ay=bx+c$ alla forma $y=b\left(x+\frac{c}{b}\right)$. Ciò fatto, suppongo $x+\frac{c}{b}=z$, sostituisco, e otterremo $ay=bz$. Ora ponendo z le ascisse, y le ordinate, la linea della $ay=bz$ altro non è che la MAN del (*n.*° 50) (Fig. 59); qual differenza adunque passerà fra questa MAN, e la linea corrispondente alla $ay=bx+c$? Prendasi sulla ZV la porzione $AB=\frac{c}{b}$, ne verrà $BP=AP-AB=z-\frac{c}{b}$, ma dalla $x+\frac{c}{b}=z$ abbiamo anche $x=z-\frac{c}{b}$; dunque sarà $BP=x$; ora la x altro non esprime che le ascisse della data $ay=bx+c$; dunque tale Equazione ci darà una linea, di cui le ascisse sono le BP, Bp, ec., e le ordinate le stesse PM, Pm, ec. della $ay=bz$: ma gli estremi M, m ec., quelli sono che propriamente determinano la linea, che si cerca (*n.*° 49), e questi frattanto sono perfettamente nella stessa posizione, sì mentre le ordinate dipendono dalla $ay=bz$, che mentre nascono dalla $ay=bx+c$; dunque amendue queste Equazioni ci esprimeranno la medesima MAN con la sola differenza, che la $ay=bz$ ha il suo principio d'ascisse in A, ove la MAN taglia la ZV, e le ascisse della $ay=bx+c$ principiano dal punto B collocato alla destra, e lontano dal punto d'intersecazione A della distanza $AB=\frac{c}{b}$. Nulla dunque influendo una simile differenza nella natura della MAN, quindi ne viene, che anche la $ay=bx+c$ esprime la stessa linea retta della Equazione prec. (*n.*° 53).

II. Prendasi alla sinistra di A la porzione $AC=AB$; poichè $AB=\frac{c}{b}$, ne verrà $CP=CA+AP$

$= \frac{c}{b} + z$; ma se $ay = bx - c$ sia l' Equazione proposta, facendo $ay = b\left(x - \frac{c}{b}\right)$, ed $x - \frac{c}{b} = z$, ne viene $ay = bz$, ed $x = z + \frac{c}{b}$; dunque risultando $CP = x$, ripetuto il discorso precedente, si ritrova che la $ay = bx - c$ ci somministra la medesima MAN avente però il principio delle ascisse in C alla sinistra, e alla distanza da A della porzione $CA = \frac{c}{b}$.

III. Oltre la c, sia negativa anche la b, onde abbiasi $ay = -bx - c$. Risultando $ay = -b\left(x + \frac{c}{b}\right)$ ne verrà $ay = -bz$, fatto $x + \frac{c}{b} = z$. Giacchè in questo caso il coefficiente $-b$ è negativo, presa sull' asse ZV, come nel (n.° 53) la porzione $AD = a$, si conduca al disotto del punto D la perpendicolare $DE = b$, e pei punti A, E si tiri la MAN; questa retta MAN, è facile il vedere, ripetuti i precedenti discorsi, che sarà la linea della supposta Equazione $ay = -bx - c$, col prendersi però il principio delle ascisse x in D, e fatto $AB = \frac{c}{b}$. Tutta la differenza adunque delle linee dipendenti dalle due Equazioni $ay = bx + c$, $ay = -bx - c$ consiste in ciò, che mentre la prima NAM (Fig. 59) taglia la ZV obbliquamente dal basso all' alto, l'altra NAM (Fig. 60) viceversa la taglia in modo simile dall' alto al basso.

Fig. 60

56. *Scol.* 4.° I. Consideriamo presentemente i valori dei coefficienti a, b, c: e in primo luogo rapporto alla c, vedesi chiaramente, che il supporre questa o maggiore, o minore in altro non

influisce, se non nel portare più vicino, o più lontano dal punto di intersecazione A il principio delle ascisse B, cosicchè se sia $c=o$, allora divenendo AB=o, le ascisse incominciano dallo stesso punto A; frattanto poi la MAN resta sempre la medesima, e nella medesima posizione.

II. Vada cangiandosi la b; al crescere, o al diminuirsi di questa anderà aumentandosi, o scemandosi in lunghezza la DE; e per conseguenza anderà scemando, o crescendo l'inclinazione della NAM sulla ZV, che se si faccia $b=o$, la Equazione $ay=bx+c$ divenendo $y=\frac{oXx+c}{a}$; qualunque valore si attribuisca alla x, si avrà costantemente $y=\frac{c}{a}$, poichè sempre ne viene $oXx=o$. S'innalzino pertanto sulla ZV le ordinate PM, pm, ec. ciascuna $=\frac{c}{a}$; è evidente che la NAM dovrà risultare parallela alla ZV; e per conseguenza l'Equazione $ay=oXx+c$, ossia $ay=c$ esprimerà una retta parallela alla linea delle ascisse, che potremo agevolmente determinare innalzando dal principio delle ascisse B una perpendicolare BA $=\frac{c}{a}$. Suppongasi ora che la c vada scemando; diminuendosi corrispondentemente la BA, e ciascuna $y=\frac{c}{b}$, la parallela NAM si accosterà sempre più alla ZV, cosicchè se diventi $c=o$, tali divenendo pure le BA, PM, ec. la NAM si confonderà con la ZV, e però l'Equazione $ay=o$, ovvero $y=o$ ci rappresenterà la linea medesima delle ascisse ZV. Fig. 61

III. Finalmente supponghiamo che gli aumenti, o le diminuzioni si facciano sulla a; anderà perciò crescendo, o calando la AD (Fig. 59. 60), e quindi la NAM si anderà sempre più, o meno inclinan- Fig. 59, 60

do alla ZV. Supponghiamo che si faccia $a=0$, il punto D anderà in questo caso a cadere su di A; ma il punto E è comune ad amendue le AE, DE, dunque queste AE, DE anderanno a coincidere insieme, e poichè per la ipotesi (n.° 52) la DE è perpendicolare alla ZV, tale sarà pur anche la AE,

Fig. 62 ossia la NAM, come nella (Fig. 62), ove per conseguenza la linea NAM verrà espressa dalla Equazione $0 \times y = bx + c$, ovvero $0 = bx + c$, ed ove non si avrà che l'unica ascissa $BA = x = -\frac{c}{b}$. Se poi sia anche $c=0$, il punto B caderà sopra A, e la linea NAM non sarà che l' asse delle ordinate, il quale perciò verrà espresso dalla Equazione $x=0$.

57. *Scol.* 5.° I.° Vogliasi ora l'angolo delle coordinate non retto (III. n.° 52), e posto esso in generale di h gradi, si voglia determinare quale in questa ipotesi sia la linea della Equazione $ay = bx + c$.

Fig. 63 Presa perciò sulla linea d' ascisse ZV la porzione $AD = a$, conducasi dal punto D la $DE = b$ per modo, che risulti di h gradi l'angolo ADE; e poscia pei punti A, E si tiri la NAM; condotta un ordinata qualunque PM parallela a DE, poichè risulta $AD : DE :: AP : PM$, si dimostra come nei (*n. prec.*), che la retta NAM è la linea richiesta.

II. Dunque qualunque siansi i coefficienti della $ay = bx + c$, e qualunque l' angolo fra le ordinate, e le ascisse, la linea, che da essa risulta, è sempre una retta o parallela, o perpendicolare, od obbliqua alla linea delle ascisse. Dunque chiamandosi *linea di* 1.° *ordine, o grado* quella che dipende da un' Equazione indeterminata del grado 1.°; *linea del* 2.° *ordine, o grado* quella, che nasce da un' Equazione indeterminata di 2.° grado, e così di seguito, ne segue che le linee del primo ordine non sono mai che tante linee rette.

58.

58. *Probl.* 12.° La precedente retta MN della Fig. 63 Equazione $ay = bx + c$ già riferita alla linea di ascisse ZV, ed in cui le coordinate $BP = x$, $PM = y$, fanno tra loro l' angolo h (I. *n.° prec.*), si voglia ora riferire ad una nuova linea d' ascisse XY data essa pure di posizione, e stabilito in C il principio delle nuove ascisse, si voglia, che le nuove coordinate CQ, QM facciano tra di loro un determinato angolo k.

Sol. Condotti dai punti C, Q, le CI, QL, CF, QK parallele rispettivamente alle ZV, MP, osservo, che essendo cogniti gli angoli h, k, cogniti i punti B, C, e cognita la posizione, e però la mutua inclinazione tra loro delle ZV, XY, deggiono essere note le rette BF, FC, e noti gli angoli di amendue i triangoli QCH, MQL, onde cogniti risultano i rapporti de' loro lati. Posto dunque $BF = d$, $FC = e$, $CQ : CH :: 1 : f$, $CQ : QH :: 1 : g$, $QM : QL :: 1 : i$, $QM : ML :: 1 : j$, e posto $CQ = z$, $QM = u$, poichè si ricava $CH = FK = fz$, $QH = LI = gz$, $QL = KP = iu$, $ML = ju$, ed abbiamo $x = BP = BF + FK + KP$, $y = PM = PI + IL + LM$, ne verrà

$$x = d + fz + iu, \quad y = e + gz + ju,$$

e per conseguenza la Equazione della data linea retta alle nuove coordinate sarà la

$$a(e + gz + ju) = b(d + fz + iu) + c.$$

59. *Scol.* 7.° I. L' esposta trasformazione delle coordinate è affatto generale, e da essa si possono agevolmente dedurre tutte le particolari. Difatti se si voglia che il punto C coincida col punto B, allora risultando $d = 0$, $e = 0$, si avrà $x = fz + iu$, $y = gz + ju$, e quindi $a(gz + ju) = b(fz + iu) + c$ sarà l' Equazione richiesta. Se si ponga la XY parallela alla ZV; poichè allora si ha $QH = 0$ indipendentemente dalla z, e si ha $CH = CQ$, dovrà essere $g = 0$, $f = 1$, onde $x = d + z + iu$, $y = e + ju$, e però $a(e + ju) = b(d + z + iu) + c$; e nel caso

della XY parallela alla MP avendosi CH $= o$, CQ $=$ QH, sarà $f = o$, $g = 1$, e quindi $x = d + iu$, $y = e + z + ju$, ed $a(e + z + ju) = b\ (d + iu) + c$. Che se si voglia, che cadendo il punto C in B, la XY combaci con la prima linea di ascisse, cioè con la ZV, o con il primo asse delle ordinate ($n.^o$ 52); nel primo di questi due casi avremo evidentemente $x = z + iu$, $y = ju$, ed $aju = b\,(z + iu) + c$, e nel secondo $x = iu$, $y = z + ju$, onde $a(z + ju) = biu + c$; e se in questo caso secondo si chieggano inoltre le nuove ordinate parallele alle prime ascisse, risultando in corrispondenza ancora $i = 1$, $j = 1$, si avrà $x = u$, $y = z$, e quindi $az = bu + c$. Se finalmente si voglia, che la nuova linea di ascisse XY invece di scorrere come nella (Fig. 63) dal basso all'alto, scorra dall' alto al basso, oppure se si voglia che il punto B, o le nuove ordinate MQ invece di esistere alla sinistra, quello di C, e queste delle MP ne esistano al contrario alla destra; è facile a vedersi, che anche in queste ipotesi si otterrà il chiesto cangiamento di coordinate, mentre nei valori delle x, y precedentemente truovati si cambiino opportunamente i segni ai diversi termini.

II. Poichè l'esposta trasformazione delle coordinate è affatto indipendente dalla linea MN; ne segue che essa avrà sempre luogo qualunque altra siasi la linea, o retta, o curva, che viene proposta.

CAPO VI.

Della risoluzione dei Problemi Geometrici indeterminati dipendenti soltanto dalla linea retta, e dal circolo.

60. *Esem.* 19.° Dato un angolo GAF, ritrovare un punto M, da cui conducendo sul lato AF la retta MP parallela all' altro lato AG, risulti AP + PM = ad una retta data BC. Fig. 64

Sol. Supposto BC $= a$, AP $= x$, PM $= y$, le condizioni del Problema ci daranno soltanto $x+y=a$: Dunque infiniti sono i punti M, che vi soddisfanno, e avendosi $y = a - x$, essi tutti si ritroveranno su di una retta (*n.*° 58). Affine di ottenere questo luogo geometrico, prendo sui lati AF, AG, le due porzioni AD, AE, ciascuna $= a$, conduco pei punti D, E, l'indefinita RS, e questa sarà la retta cercata. Tirate difatti sulla AF, presa come linea d' ascisse, le ordinate MP parallele ad AG, avremo DP : PM :: AD : AE, e però a cagione di AD = AE $= a$, AP $= x$, PM $= y$, avremo $y = a - x$. Dunque, ec.

61. *Esem.* 20.° Supposto un triangolo ABC trovare un punto M, da cui abbassando sui tre lati le tre perpendicolari MP, MQ, MR, risulti la loro somma uguale all' altezza CD. Fig. 65

Sol. Ponghiamo CD $= a$, CB $= b$, AB $= c$, AC $= d$, AD $= e$, DB $= f$, e supposto dal punto M, che si cerca, abbassate le perpendicolari MP, MQ, MR, ponghiamo CP $= x$, PM $= y$. Avendosi CD:CB::CP:CF

$= \frac{CB\times CP}{CD} = \frac{bx}{a}$; $CD : DB :: CP : PF = \frac{DB\times CP}{CD} = \frac{fx}{a}$,

e però $MF = MP - PF = y - \frac{fx}{a} = \frac{ay - fx}{a}$, e condotta da M la ME parallela alla AB risultando $CB : BD :: MF : FE = \frac{BD\times MF}{CB} = \frac{afy - f^2x}{ab}$ ne verrà
$MQ = ED = CD - CF - FE = a - \frac{bx}{a} - \frac{afy - f^2x}{ab}$
$= \frac{a^2b + (f^2 - b^2)x - afy}{ab} = \frac{a^2b - a^2x - afy}{ab} = \frac{ab - ax - fy}{b}$,
$MR = CD - MQ - PM = a - y - \left(\frac{ab - ax - fy}{b}\right) = \frac{ax + (f-b)y}{b}$.

Ora, condotte dal punto M ai tre angoli A, B, C la MA, MB, MC, ne vengono i tre triangoli AMB, AMC, BMC, la somma de' quali $= ACB$: Dunque essendo $AB\times MQ + AC\times MR + BC\times MP = AB\times CD$, otterremo $c \times \frac{ab - ax - fy}{b} + d \times \frac{ax + (f-b)y}{b} + by = ac$,

e riducendo

$$a(d-c)x - (b(d-b) + f(c-d))y = 0.$$

Non potendosi dai dati ricavare altra Equazione, il Problema sarà indeterminato, e per averne il corrispondente luogo geometrico divisa l' Equazione ottenuta per a, ricerco il valore dei coefficienti $d - c$, $\frac{b(d-b) + f(c-d)}{a}$, e chiamato il primo m, n il secondo, onde risulti l' Equazione $mx - ny = 0$, sul lato CB del dato triangolo prendo la porzione $CG = n$, innalzo da G la perpendicolare $GH = m$, e pei punti C, H tiro l' indefinita ST. Essendo questa retta il luogo della $mx - ny = 0$, da qualunque suo punto M si abbassino le tre per-

Fig. 66

pendicolari MP, MQ, MR, ne verrà sempre la loro somma $=$ CD.

62. *Scol.* 1.° I. Nell' Esempio del (*n.*° 60) potendosi la RS prolungare all' infinito da una parte, e dall'altra, vedesi che la x, e la y si aumenteranno esse pure all' infinito; ciò non pertanto avremo sempre la somma delle coordinate $= a$ (*n.*° *prec.*). Imperciocchè se prendasi sulla RS al disopra di AG ad una distanza qualunque un punto R, condotta l' ordinata RQ, risultando l' ascissa AQ $= -x$, avremo $y - x = a$; e se si prenda al disotto di AF sulla RS un qualsivoglia punto H, tirata l'ordinata HF, questa divien negativa, e avremo per conseguenza $x - y = a$. Svanisce adunque sì nell' un caso, che nell' altro l' apparente difficoltà.

II. Col prolungarsi nell' Esempio del (*n.*° 61) della ST indefinitamente, anche i suoi punti fuori del triangolo dovranno sciogliere il Problema; ma per riconoscere come ciò possa succedere, prolungate da tutte le parti i tre lati AB, AC, BC, si osservi, come facemmo nel (*prec.* I), che essendosi considerate positive le tre perpendicolari MP, MQ, MR, mentre cadono entro dei tre lati si dovranno prendere negative, allorchè cadono nella parte loro opposta.

III. Se il triangolo dato (*n.*° 61) sia equilatere, avendosi $b = c = d$, la Equazione ottenuta diverrà $c = o$; dunque replicato quanto si disse nel Problema del (*n.*° 22), vedesi che tutti i punti del piano, su cui è descritto il triangolo, sciorranno il nostro Problema. Che se il triangolo sia isoscele, coll' essere il lato AB $=$ AC; allora l' Equazione risultataci divenendo $y = o$; pel (II. *n.*° 56) col terzo lato disuguale si combacerà il luogo geometrico che risolve il Problema.

63. *Esemp.* 21.° Supposte due rette DB, ON fra loro perpendicolari, determinare un punto M, Fig. 67

da cui conducendo una retta MN, la quale passi per un dato punto A della DB, vada essa ad incontrare la ON, e producasi quindi $\overline{AM}\times\overline{AN}=\overline{AD}^2$.

Sol. Poichè il punto A è dato, ponghiamo $DA=a$, e dal punto M, che si cerca, tirate la MN, che passi pel punto A, e la perpendicolare MP, ponghiamo $AP=x$, $PM=y$. Essendo $AM=\sqrt{(x^2+y^2)}$, ed $AP:AM::AD:AN=\frac{\overline{AD}\times\overline{AM}}{AP}=\frac{a\sqrt{(x^2+y^2)}}{x}$, per la condizion del Problema, otterremo
$\sqrt{(x^2+y^2)}\times\frac{a\sqrt{(x^2+y^2)}}{x}=a^2$, e però $a(x^2+y^2)=a^2x$, e finalmente $y^2=ax-x^2$. Ora l'Equazione avuta presentemente esprime un circolo del raggio $\frac{a}{2}$ (*n.*° 49). Dunque, presa la $AC=\frac{a}{2}$, e descritto col centro C, e raggio CA il circolo corrispondente, tutti i punti della sua circonferenza AMBE sciorranno il Problema.

Fig. 68 64. *Esem.* 22.° Dati i due punti A, B, ritrovar tutti i punti M, a cui conducendo le rette AM, BM, sia sempre $AM:BM$ nella ragion costante di $m:n$.

Sol. Congiunti i punti dati con la AB, sia $AB=a$, e da M abbassata la perpendicolare MP, sia $AP=x$, $PM=y$. Risultando $PB=a-x$, $AM=\sqrt{(x^2+y^2)}$, $BM=\sqrt{((a-x)^2+y^2)}$, avremo pel richiesto dal Problema $\sqrt{(x^2+y^2)}:\sqrt{((a-x)^2+y^2)}::m:n$, e perciò $n^2x^2+n^2y^2=m^2(a-x)^2+m^2y^2$, e finalmente

$$y^2=\frac{a^2m^2}{n^2-m^2}-\frac{2am^2}{n^2-m^2}x-x^2.$$

Ritrovo ora il valore di questi coefficienti, e supponghiamo $\frac{a^2m^2}{n^2-m^2}=c^2$, $\frac{2am^2}{n^2-m^2}=d$; sostituendo

ne verrà $y^2 = c^2 - dx - x^2$; per costruire questa Equazione la riduco alla forma $y^2 = -\left(x^2 + dx + \frac{d^2}{4}\right) + \frac{d^2}{4} + c^2 = -\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d^2}{4} + c^2\right)$, e supposto $x + \frac{d}{2} = z$, $\frac{d^2}{4} + c^2 = g^2$, otterremo $y^2 = g^2 - z^2$.

Prendasi alla sinistra di A la porzione AC $= \frac{d}{2}$, poscia col centro C, e raggio CM$=g$ si descriva il Circolo MDN; e finalmente abbassata da un punto qualunque M della sua periferia la perpendicolare MP, si conduca il raggio CM $= g$, e si ponga CP$=z$. Ciò fatto, si osservi, che qualunque siasi la lunghezza di questa z, per la natura del Circolo si ha sempre $PM^2 = g^2 - z^2$. Dunque avendosi PM$=y$, e però le estremità delle y quelle essendo, che sciolgono l'esposto Problema, ne segue che rimarrà esso risolto dalla circonferenza ora descritta.

65. *Scol.* 2.° I. Sia $m=n$. In questa ipotesi la precedente Equazione $n^2x^2 + n^2y^2 = m^2(a-x)^2 + m^2y^2$ divenendo $o = m^2a^2 - 2m^2ax$, e però $x = \frac{a}{2}$, il luogo geometrico, che scioglie il Problema non sarà più la circonferenza di un circolo, ma una retta condotta perpendicolarmente dal punto di mezzo della data AP$=a$.

II. Tanto l'Equazione $y^2 = 2gx - x^2$ trovata nel (*n.*° 49), come la $y^2 = g^2 - z$ del (*n.*° *prec.*) vedesi che ci esprimono un circolo avente il raggio g, quella però col principio delle ascisse x al principio del diametro, e questa col principio delle ascisse z nel centro. Vogliasi ora determinare per quale Equazione venga ad esprimersi il circolo MANB del raggio g, mentre si riferisce ad una qualunque

data linea di ascisse ZV, posto il principio delle ascisse in un qualunque punto di essa E. Per soddisfare a questa richiesta potremmo pel (II. n.° 59) servirci delle formole trovate nel (n.° 58): la natura però del circolo fa sì, che vi potremo soddisfare assai semplicemente nella seguente maniera. Si ponga in primo luogo l'angolo delle coordinate retto, e in questa ipotesi condotti dal centro C il diametro HD parallelo, e la retta CF perpendicolare alla data ZV, e da un qualsivoglia punto M della circonferenza, condotta l' ordinata MQ perpendicolare alla ZV, ritengasi, come nel (n.° 64), il raggio $CD=g$, la $CP=z$, la $PM=y$, e si ponga la $EF=m$, la $CF=n$, l'ascissa $EQ=t$, e l'ordinata $QM=u$. Avremo evidentemente $z=FQ=t-m$, $y=u-n$, ma qualunque sia la posizione del diametro HD, essendo le coordinate z, y ortogonali; deve sempre per la natura del circolo essere $y^2=g^2-z^2$ la sua Equazione. Dunque con la sostituzione risultando $(u-n)^2=g^2-(t-m)^2$, sarà questa nel caso dell' angolo fra le t, u retto, l' Equazione domandata.

Se il principio delle t si fosse preso alla destra del punto F per esempio in E', ritenuta la retta $E'F=m$, sarebbesi trovato $(u-n)^2=g^2-(t+m)^2$, e se la linea delle ascisse invece d' esistere al disotto, esistesse sopra del centro C nella Z' V', ritenuta la $CF'=n$, sarebbe risultata l' Equazione $(u+n)^2=g^2-(t-m)^2$, oppure la $(u+n)^2=g^2-(t+m)^2$, secondochè il principio delle ascisse si prende in E'', ovvero in E'''. Da questo si vede, che qualunque siasi la posizione della linea delle ascisse, l' Equazione generale del circolo, quando l' angolo delle coordinate è retto, si è la $(u\pm n)^2=g^2-(t\pm m)^2$, ove g esprime il raggio, e le m, n determinano il rapporto di posizione del centro C col principio delle ascisse E, e con la linea ZV.

III. Data viceversa l'Equazione $(u-n)^2=g^2-(t-m)^2$, se venga richiesto di trovare il luogo geo-

metrico, cioè descrivere il circolo, che corrispondentemente alle coordinate t, u, ne viene rappresentato; si prenda sopra la linea delle ascisse ZV, cominciando dal loro principio E, e scorrendo verso le ascisse positive, la porzione $EF=m$; dal punto F perpendicolarmente alla ZV, e dalla parte delle ordinate positive si conduca la $CF=n$; e fatto centro in C col raggio $CM=g$ si descriva il circolo MDN, e questo pel (*prec.* II) sarà evidentemente il chiesto. Se nella Equazione data il termine m, o l'altro n, od amendue fossero stati dotati di segno contrario al considerato; allora la EF, ovvero la FC, od amendue queste rette si avrebbero dovuto in corrispondenza assumere nella direzione opposta all'accennata.

IV. Vogliasi il luogo geometrico dell'Equazione $u^2+au=c^2-t^2+bt$, ove le t, u fanno tra loro angolo retto; compiendo i quadrati, che corrispondono alle espressioni u^2+au, t^2-bt, riduco l'Equazione data alla forma $u^2+au+\frac{a^2}{4}=c^2+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-\left(t^2-bt+\frac{b^2}{4}\right)$, ossia $\left(u+\frac{a}{2}\right)^2=c^2+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-\left(t-\frac{b}{2}\right)^2$, e trovato coi metodi sovraesposti il valore della espressione $c^2+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$, che dirò g^2, descrivo giusta il (*prec.* III) il circolo dell'Equazione $\left(u+\frac{a^2}{2}\right)=g^2-\left(t-\frac{b}{c}\right)^2$, e questo sarà il luogo geometrico domandato.

V. Si cerca in secondo luogo l'Equazione generale al circolo, facendo le coordinate un angolo fra di loro non retto. Ritenuta perciò nel solito circolo MDNH la ZV linea di ascisse siano $ER=r$, $RM=s$

le nuove coordinate tra loro oblique. Condotte dai punti M, C le MP, CF perpendicolari alla ZV, ritenute le denominazioni del (*prec.* II), onde $(u \pm n)^2 = g^2 - (t \pm m)^2$ sia l' Equazione tra le coordinate $EQ = t$, $QM = u$, e supposto che nel triangolo RMQ, di cui sono noti tutti gli angoli, si abbia, come nel (*n.* 58), RM : RQ :: 1 : i, RM : MQ :: 1 : j, otterremo, come nel (I. *n.*° 59) $t = r + is$, $u = js$, e quindi

$$(js \pm n)^2 = g^2 - (r + is \pm m)^2.$$

sarà l' Equazione richiesta tra le coordinate r, s non ortogonali.

66. *Esem.* 23.° Determinare l' Equazione di quella retta, la quale riferita ad una data linea, e a un dato principio di ascisse deve passare per due punti determinati.

Fig. 59 *Sol.* Siano nella (Fig. 59) E, m i due punti dati, pe' quali deve passare la retta, che si domanda, siano ZV la data linea, e C il dato principio delle ascisse, e abbassate dai punti, E, m le ordinate ED, mp, pongasi $CD = g$, $DE = h$, $Cp = i$, $pm = k$. Chiamate x le ascisse, ed y le ordinate della cercata retta, sarà in generale $ay = bx + c$ (*n.*° 58) la sua Equazione, ossia, diviso tutto per a, e fatto $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, sarà sua Equazione la $y = px + q$.

Ciò posto, poichè, quando $x = g$, deve evidentemente risultare $y = h$, e quando $x = i$, dev' essere $y = k$, avremo le due Equazioni $h = pg + q$, $k = pi + q$, e da queste ritraesi $p = \frac{h - k}{g - i}$, $q = \frac{gk + hi}{g - i}$. Sostituisco tali valori nella $y = px + q$, e la $y = \frac{(h - k)x}{g - i} + \frac{gk - hi}{g - i}$ sarà l' Equazione richiesta.

67. *Scol.* 3.° I. La costituzione di due punti E, m, pe' quali deve passare la retta, che si cercà, determina adunque il valore delle due quanti-

tà p, q; ma la determinazione di queste determina l'Equazione $y=px+q$, e da tale Equazione dipende la natura, e la posizione della retta corrispondente. Dunque la determinazion di due punti determina, come già sapevamo dalla Geometria elementare, la posizion di una retta.

II. Se fosse stato domandato che la retta da descriversi passasse per un solo punto, per esempio pel solo E: allora avendosi la sola Equazione $h=pg+q$, il Problema sarebbe indeterminato, e infinite rette potendosi per conseguenza condurre pel dato punto E, ne segue, che un solo punto non basta a determinare la posizione di una retta.

68. *Esem.* 24.° Data una retta BG riferita alla linea delle ascisse ZV, di cui $u=mt+n$ sia l'Equazione, avendosi $AP=t$, $PM=u$, vogliasi condurre un'altra retta GD, la quale tagli la prima BG in un punto G tale, che abbassata da esso la ordinata GH, venga a segarsi sulla ZV una porzione AH di una data lunghezza, che dirò a. Fig. 69

Sol. Denominata $y=px+q$ l'Equazione della retta DG, e supposto che anche di questa sia ZV la linea delle ascisse, A il loro principio, e che le sue ordinate $NQ=y$ siano parallele alle ordinate MP della retta data, osservo che la GH è ordinata tanto della prima, come della seconda retta, e che posto per conseguenza tanto t, come $x=AH=a$, avremo in corrispettività $GH=ma+n$, $GH=pa+q$, e quindi $pa+q=ma+n$. Avendosi così un'Equazione con le due incognite p, q, si vede, che una di esse rimane in generale di valore arbitrario, e che quindi infinite sono le rette, le quali sciolgono il Problema. Ritraendo il valore del coefficiente p, poichè si ha $p=m+\frac{n-q}{a}$,

tali rette verranno espresse dalla $y=\left(m+\frac{n-q}{a}\right)x+q$,

e ricavando il valore della q, esse si rappresenteranno con la $y = px + (m - p)a + n$. Perchè poi rimane nella prima delle truovate Equazioni indeterminata la q, nella seconda la p; ne segue, che col far variare la q in quella, e la p in questa si avranno tutte le rette domandate. Ho detto che una delle p, q resta di valore arbitrario in generale; perchè difatti se diamo alla q nella prima il valore particolare n, e facciamo $p = m$ nella seconda, tanto l'una che l'altra delle Equazioni ottenute divenendo $y = mx + n$, diventa la stessa che la data $u = mt + n$, e però coincidendo la GD, che si cerca con la BG, che si è proposta; non viene a determinarsi il punto G domandato.

69. *Scol.* 4.° I. Vogliasi la GD parallela alla ZV. In questo caso $y = ma + n$ sarà evidentemente l'Equazione cercata.

II. Vogliasi la GD perpendicolare alla BG. Poste in questa ipotesi le ordinate ortogonali, osservo, che dovendo la GD cadere dalla parte, ove la BG fa con la ZV angolo acuto, deve, mentre sia positivo il coefficiente della t ascissa della BG, essere negativo il coefficiente della x ascissa della GD, e però che essendo $u = mt + n$ l'Equazione della BG l'Equazione della DG sarà della forma $y = -px + q$, onde $-pa + q = ma + n$ (*n.*° 68), ossia, fatto per brevità $ma + n = b$, sarà $-pa + q = b$. Ora avendosi nel punto B la $u = 0$, e nel punto D la $y = 0$, si ottiene in corrispondenza $AB = -\frac{n}{m}$, $AD = \frac{q}{p}$, e quindi $BH = a + \frac{n}{m}$, $HD = \frac{q}{p} - a$. Dunque a cagione dell' angolo BGD retto essendo $BH : HG :: HG : HD$, ne verrà $a + \frac{n}{m} : b :: b : \frac{q}{p} - a$, e però $1 : m :: q - b : a$, onde $q - b = \frac{a}{m}$; ma dalla $-pa + q = ma + n = b$ si ritrae $p = \frac{q-b}{a}$; dunque avremo $p = \frac{1}{m}$, $q = b + \frac{a}{m}$

$= \frac{(m^2+1)a+mn}{m}$, e per conseguenza $y = -\frac{1}{m}x + \frac{(m^2+1)a+mn}{m}$ sarà l' Equazione di quella linea retta, la quale corrispondentemente all' ascissa a taglia ad angoli retti la retta della Equazione $u = mt + n$. Posto pertanto $\frac{(m^2+1)a+mn}{m} = h$, poichè per l' arbitrarietà della n rimane arbitrario il valore della h, le rette delle due Equazioni $u = mx + n$, $y = -\frac{1}{m}x + h$ saran sempre perpendicolari fra loro, e il punto della loro intersecazione corrisponderà ad $a = \frac{m(h-1)}{m^2+1}$.

III. Se con lo stesso principio, e la stessa linea di ascisse descrivansi le rette delle due Equazioni $u = mx + n$, $y = mx + h$; esse dovranno risultare parallele fra loro, perchè qualunque sia l' ascissa x avendosi $y - u = h - a$, la differenza delle due ordinate y, u è di un valore costante.

IV. Attribuiti nella $pa + q = ma + n$ alle p, q i valori determinati p', q', si sostituisca invece della a una lettera esprimente un' incognita per esempio la z; risultando da ciò $(p' - m)z = n - q'$ avremo così un' Equazione, di cui essendo radice il valore a, ne otterremo pel ($n.°$ 68) sempre la costruzione, mentre sopra la stessa linea ZV, e con lo stesso principio A di ascisse si descrivano le due rette BG, DG delle rispettive Equazioni $u = mx + n$, $y = px + q$, e mentre dal loro punto d' intersecazione G gli conduca l' ordinata GH.

70. *Esem.* 25.° Trovare riferita ad una retta data come linea di ascisse, e a un dato punto come loro principio l' Equazione di quel circolo, la cui periferia passa per tre punti dati.

Sol. Chiamate a', a'', a''' le ascisse, b', b'', b''',

le ordinate dei tre proposti punti, prendo l'Equazione generale del Circolo riferito a coordinate rettangole, cioè la $(u-n)^2=g^2-(t-m)^2$ (II. *n.*° 65), ove per maggiore semplicità non pongo innanzi alle quantità m, n, che il solo segno $-$, sostituisco in essa in luogo delle variabili t, u i valori ora supposti, e si avranno le tre Equazioni $(b'-n)^2=g^2-(a'-m)^2$, $(b''-n)^2=g^2-(a''-m)^2$, $(b'''-n)^2=g^2(a'''-m)^2$. Sottraggo la prima di queste Equazioni dalla seconda, e la seconda dalla terza; e avute così le altre $b''^2-b'^2+2n(b'-b'')=a'^2-a''^2+2m(a''-a')$, $b'''^2-b''^2+2n(b''-b''')=a''^2-a'''^2+2m(a'''-a'')$, determino da esse il valore delle m, n, sostituisco tali valori in una delle precedenti tre Equazioni, e ricavato per simile guisa il valore di g^2, col sostituire questi tre valori delle quantità m, n, g^2 nella $(u-n)^2=g^2-(t-m)^2$, ne risulterà l'Equazione richiesta dal Problema.

71. *Scol.* 5.° I. Poichè, tre essendo i punti dati, rimangono determinate le tre quantità m, n, g; quindi apparisce come tre punti determinano la posizione d'un Circolo. Conosciute poi le accennate m, n, g, sapremo quindi pel(III. *n.*° 65) stabilire la posizione di esso circolo relativamente alla supposta linea d'ascisse.

II. Siano i tre punti, pe' quali si vuol condurre la circonferenza in una stessa linea retta, e siano essi i punti R, M, G, avendosi AS$=a'$, SR$=b'$, AP$=a''$, PM$=b''$, AH$=a'''$, HG$=b'''$. Condotte in questa ipotesi le Rr, Mm parallele alla ZV, per esse avremo $a''-a':b''-b'::a'''-a'':b'''-b''$, e però $(a''-a')\ (b'''-b'')-(a'''-a'')\ (b''-b')=0$. Ora si ponga $a''^2-a'^2+b''^2-b'^2=C'$, $a'''^2-a''^2+b'''^2-b''^2=C''$, $2(a''-a')=A'$, $2(a'''-a'')=A''$, $2(b''-b')=B'$, $2(b'''-b'')=B''$: dalle due Equazioni del (*n.*° *prec.*) ove le m, n sono al 1.° grado, otterremo perciò $m=\frac{B''C'-B'C''}{A'B''-A''B'}$, $n=\frac{A'C''-A''C'}{A'B''-A''B'}$

Fig. 69

ed otterremo il denominatore $A'B''-A''B'=4(a''-a')(b'''-b'')-(a'''-a'')(b''-b')$ uguale nel nostro caso allo zero, ma nè l'uno, nè l'altro dei numeratori $B''C'-B'C''$, $A'C''-A''C'$ risulta, generalmente parlando, uguale allo zero. Dunque nella supposizione presente le quantità m, n, e però il raggio $g=\sqrt{((a'-m)^2+(b'-n)^2)}$ (*n.*° *prec.*) acquistando un valore infinito (I. *n.*° 93. *Alg.*); il centro della circonferenza, che dovrebbe passare pei tre punti R, M, G, si truoverebbe ad una distanza infinita, il che secondo la maniera di parlare dei Matematici vorrebbe dire, che quanto più i tre punti, pe' quali deve passare la periferia del Circolo, si accostano a porsi in retta linea, tanto più il centro si allontana dai punti medesimi fino a superare qualunque lunghezza si possa assegnare cit.° (I. *n.*° 93 *Alg.*).

III. Descritta nella (Fig. 70) la circonferenza GKF, la quale passi pei tre punti G, F, K non collocati in linea retta, e condotte dal puntò di mezzo F le due corde FG, FK, e la MN tangente in F al circolo, supponghiamo, che rimanendo il punto F immobile, gli altri due G, K nelle direzioni GM, KN perpendicolari alla MN si vadano sempre più avvicinando alla stessa MN, fino a potervi cader sopra, e porsi quindi con lo stesso F in una sola linea retta MN. Sotto tale accostamento gli angoli MFG, NFK formati dalla tangente con le corde FG, FK si vanno sempre più impiccolendo fino a divenire zero: ma gli archi circolari FG, FK rimangono sempre compresi tra la tangente, e le corde. Dunque quanto più i due punti G, K si accostano alla MN; e però quanto più i tre G, F, K si accostano a porsi in una sola retta, tanto più gli archi FG, FK, e però tutto l'arco GFK s'accostano a combacciarsi con la MN, cosicchè quando i supposti punti giungono ad esistere tutti e tre sopra la sola MN; allora può dir-

Fig. 70

si, che con questa MN si confonde perfettamente l' indicato arco GFK; ma questo altro non è, che arco di un cerchio avente raggio infinito, ed è un arco qualunque perchè i punti G, F, K ci sono presi ad una distanza qualsivoglia tra loro. Dunque un qualsivoglia arco di una circonferenza, il cui raggio sia infinito potrà, considerarsi come una linea retta.

IV. Siano in una retta, e questa parallela alla ZV solamente i due punti R, G. In tale supposizione risultando $b'=b'''$, sarà $B''=-B'$, e però $m=\frac{C'+C''}{A'+A''}=\frac{a'''+a'}{2}$, $n=\frac{A'C''-A''C'}{B''(B'+A'')}$; ma la n non è che la perpendicolare dal centro alla ZV (II. n.° 65). Dunque esistendo l'estremo della $\frac{a'''+a'}{2}$ nel punto di mezzo della SH, ne segue che il centro del nostro cerchio truovasi sulla perpendicolare innalzata dalla metà della RG. Che se ancora il punto M debba ritrovarsi sulla parallela alla ZV, cosicchè $b'=b''=b'''$, allora risultando anche $B''=0$, il valore della n diverrà infinito, rimanendo finito, cioè $=\frac{a'''+a'}{2}$, il valore della m. Che se i soliti tre punti A, M, G si truovino sopra una retta perpendicolare alla ZV; nella stessa guisa vedremo risultare infinito il valore della m, finito quello della n. Ma ogniqualvolta uno dei valori m, n è infinito, deve diventare infinito anche il valore del raggio g. Dunque abbiasi la retta, su cui si vogliono esistenti i tre punti R, M, G, obbliqua, o parallela, o perpendicolare alla ZV, la circonferenza richiesta dovrà sempre avere un raggio infinito, ed essere quindi esso raggio sempre impossibile a determinarsi.

V. Ritenuta la precedente supposizione di $b'=b''=b'''$, onde $B''=-B'=0$, se si fosse sostituito queste va-

valore o invece delle $-B', B''$ immediatamente nel valore della m esposto nel (*prec.* II), ne sarebbe risultato $m=\frac{o}{o}$; simile espressione però divenuta tale a cagione di essere divisore tanto del denominatore, come del numeratore la $B''=o$, riducesi, come si è osservato nel (IV. *n.*° 98 *Alg.*), al suo valor vero col togliere questo divisor comune B'', e trovasi quindi in questo caso $m=\frac{o}{o}=\frac{a''+a'}{2}$ (*prec.* IV.). Nell' altra precedente supposizione ove $a'=a''=a'''$, si truoverebbe in egual modo $n=\frac{o}{o}=\frac{b''+b'''}{2}$. Da questo apparisce il perchè, mentre nel (*prec.* II) si è detto che i numeratori de' valori delle m, n per la ipotesi colà fatta non divengono zero, si è aggiunta l'espressione, generalmente parlando.

72. *Esem.* 26.° Data, come nel (*n.*° 68), la retta BG dell' Equazione $u=mt+n$, ove le coordinate $AP=t$, $PM=u$ siano per ora fra loro ortogonali, domandasi un circolo GFK, la cui circonferenza tagli in G la BG per modo, che abbassata l' ordinata GH, venga per essa a tagliarsi un'ascissa AH avente una data lunghezza a. Fig. 70

Sol. Poste le quantità p, q, g, incognite, e prese col principio in A sopra della ZV le ascisse, che dirò x, del circolo domandato, sia $(y-q)^2=g^2-(x-p)^2$ la sua Equazione (II. *n.*° 65), risultando quindi le sue ordinate y perpendicolari esse pure alla ZV. Poichè le AH, GH sono coordinate comuni tanto alla supposta linea retta, come al circolo, avremo l'Equazione $(ma+n-q)^2=g^2-(a-p)^2$: ma questa è l' unica Equazione, che somministrano le condizioni del Problema, ed in essa frattanto esistono tre incognite, cioè le tre p, q, g.

Dunque il nostro quesito ammetterà un'infinità di soluzioni, rimanendo due delle accennate incognite determinabili ad arbitrio, purchè però opportunamente alla natura del circolo, cioè in modo, che non risultino nella Equazione implicate delle quantità immaginarie, o delle infinite. Vogliasi a cagion d'esempio attribuire valori determinati alle p, q, e siano questi i valori p', q'; risultando da ciò $g^2 = (ma + n - q')^2 + (a - p')^2$, sarà $(y - q')^2 = (ma + n - q')^2 + (a - p')^2 - (x - p')^2$ l'Equazione del circolo domandato; se sia $p' = 0$, $q' = 0$, onde il centro di esso cerchio esista in A, allora $y^2 = (ma + n)^2 + a^2 - x^2$ sarà la sua Equazione. Che se si vogliano dare valori determinati al raggio g, ed alla q, chiamati essi g', q', eercherò il valore della p, e trovato $p = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(g'^2 - (ma + n - q')^2 - \frac{3a^2}{4}\right)}$, l' Equazione del chiesto circolo sarà $(y - q')^2 = g'^2 - \left(x - \left(\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(g'^2 - (ma + n - q')^2 - \frac{3a^2}{4}\right)}\right)\right)^2$, e se finalmente si volesse incognita la q, trovatosi $q = \frac{ma + n}{2} \pm \sqrt{\left(g'^2 - (a - p')^2 - \frac{3(ma + n)^2}{4}\right)}$ il circolo richiesto avrebbe l' Equazione

$$\left(y - \left(\frac{ma + n}{2} \pm \sqrt{\left(g'^2 - (a - p')^2 - \frac{3(ma + n)^2}{4}\right)}\right)\right)^2 = g'^2 - (x - p')^2.$$

In queste supposizioni dovranno, per quanto si è poc'anzi avvertito, le g', p', q' essere tali, che si abbia in corrispondenza g'^2 non $< (ma + n - q')^2 + \frac{3a^2}{4}$, g'^2 non $< (a - p')^2 + \frac{3(ma + n)^2}{4}$. Quanto poi si è detto nei (III, IV. $n.^o$ 65) c' insegna, come in tutti e tre

questi casi possiamo costruire l' Equazione ottenuta, e però descrivere il chiesto circolo.

73. *Scol.* 6.° I. Se nel Problema del (*n.° prec.*) si voglia, che oltre la porzione $AH = a$ dipendente dal punto G, e dall'ordinata GH, si determini col mezzo dello stesso circolo sulla data BK un altro punto K tale, che condotta l'ordinata KL risulti la porzione $AL = b$; allora avremo, oltre l' Equazione $(ma + n - q)^2 = g^2 - (a - p)^2$, l' altra $(mb + n - q)^2 = g^2 - (b - p)^2$, e non rimarrà quindi arbitraria, che una sola delle quantità g, p, q. In questo caso adunque il nostro Problema ammette bensì, a cagione della quantità, che rimane arbitraria, infinite soluzioni diverse, ma però ne esclude infinite altre, che hanno luogo nel caso del (*n.° prec.*), ove le quantità arbitrarie sono due. Inoltre l' indicata arbitrarietà ha un certo limite; poichè se si volesse tal quantità arbitraria determinare in modo, che si verificasse anche una terza Equazione $(mc+n-q)^2 = g^2-(c-p)^2$, oltre le altre due precedenti, allora l'arco del circolo che si richiede divenuto una linea retta (III. *n.°* 71), si confonderebbe con tutta la BK, e non producendo alcuna intersecazione, non darebbe alcuna soluzion del Problema.

II. Chiamati come di sopra p', q', g' i valori già determinati delle $p, q, g,$ che fanno contemporaneamente verificare amendue le Equazioni $(ma+n-q)^2 = g^2-(a-p)^2$, $(mb+n-q)^2 = g^2-(b-p)^2$, si formi l'Equazione $(mz + n - q')^2 = g'^2 - (z - p')^2$, ossia eseguiti i dovuti sviluppi, e le riduzioni la

$$z^2 + 2\left(\frac{mn - mq' - 2p'}{m^2 + 1}\right) z + \left(\frac{p'^2 + q'^2 + n^2 - 2nq' - g'^2}{m^2 + 1}\right) = 0;$$

è facile a vedersi, che sono radici di questa ultima Equazione amendue le precedenti quantità a, b (I. *n.°* 48). Dunque la soluzione del Problema sovraindicato (*prec.* I) somministrerà evidentemente

la costruzione della truovata Equazione in z; ma simil Problema può pel citato (*prec.* I) risolversi per infiniti circoli diversi; per la determinazione delle $\mathrm{AH}=a$, $\mathrm{AL}=b$ si può inoltre stabilire la BK in una posizione qualunque; e finalmente per essersi considerate sempre queste a, b di un valore qualunque, l'ottenuta Equazione in z può rappresentare una qualsivoglia Equazione determinata di 2.° grado. Dunque un' Equazione determinata di 2.° grado, qualunque siasi, si potrà costruire in infinite guise diverse, e le maniere di costruzione esposte nei (*Capi* III, IV) non sono quindi che alcune delle molte, che si posson formare.

Vogliasi, che la BK si combaci con la ZV, onde $u=mt+n$ divenendo $u=0$, si abbia $m=0$, $n=0$, e si voglia che il centro del cerchio domandato esista sulla ZV, onde $q=0$. In questa supposizione le due Equazioni del (*prec.* I) diventando $g^2-(a-p)^2=0$, $g^2-(b-p)^2=0$, otterremo $g=\pm(a-p)$, $g=\pm(b-p)$, e siccome le quantità a, b si vogliono tra loro diverse; posto $g=+(a-p)$, dovrà essere $g=-(b-p)$, e quindi avremo $p'=\frac{a+b}{2}$, $g'=\frac{a-b}{2}$; onde, se $z^2\pm\mathrm{A}z=\mathrm{B}^2$ sia l'Equazione, di cui le a, b son le radici, poichè si ottiene $p'=\mp\frac{\mathrm{A}}{2}$, $g'=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{A}^2}{4}+\mathrm{B}^2\right)}$, il metodo di costruzione, che risulta dal precedente generale, altro non sarà che quello, che è stato esposto nei (I, II. *n.*° 32). Che se, posta la BK parallela alla ZV, si voglia essa ad una distanza B dalla stessa ZV, per cui $u=\mathrm{B}$ ne sia Equazione, ed abbiasi perciò $m=0$, $n=\mathrm{B}$, se il centro del circolo cercato debba esistere sulla ZV, e perciò si abbia $q=0$, e finalmente $z^2\pm\mathrm{A}z=-\mathrm{B}^2$ sia l'Equazione avente le ra-

dici a, b; le Equazioni del (*prec.* I) riducendosi alle $B^2=g^2-(a-p)^2$, $B^2=g^2-(b-p)^2$; ritenuta, per la disuguaglianza delle a, b, la stessa precedente avvertenza rapporto al segno da prefiggersi; nel cercare il valore della p' si avrà $p'=\frac{a+b}{2}=\mp\frac{A}{2}$, $g'=\frac{A}{2}$, e il metodo di costruzione, che se ne ottiene, quello sarà del (III. *n.* 32). Posta in fine la DE (Fig. 35, 36) per linea delle ascisse, posto che con essa si confonda, come nel precedente caso primo, la retta data (*n.*° 72), onde $u=0$ ne sia l'Equazione, e dati tre punti A, B, I determinati giusta i (III, IV. *n.*° 33), se dovendosi costruir l'Equazione $z^2\pm Az=\pm CD$, si voglia, che il centro del circolo da descriversi, onde ottenere le due sue radici (*prec.* II), esista nel centro di quel circolo, che passa pei tre punti dati A, B, I: il metodo di costruzione, che ne proviene dal generale (*prec.* II), altro non sarà, che l'esposto nei citati (III, IV. *n.*° 33.) risultando $AK=p$, $KC=q$, $CH=g$, e potendosi trovare il valore delle p, q mediante il (*n.*° 70) dei tre dati punti A, B, I, e determinare il valore del raggio g col mezzo di una delle Equazioni del (*prec.* I).

III. Ritenuto doversi descrivere il circolo della precedente Equazione $(y-q)^2=g^2-(x-p)^2$, e doversi al solito tagliare sulla ZV le porzioni $AH=a$, $AL=b$ (*n.*° 72, *prec.* I), si voglia, che la linea, con la quale deve intersecarsi il circolo, che si cerca, sia non già la solita retta BK, ma bensì un altro circolo, quello dell'Equazione $(u-n)^2=d^2-(t-m)^2$, ove m, n, d siano quantità cognite. In questa supposizione corrispondentemente al punto d'intersecazione, che somministra la $AH=a$, avendosi $t=x=a$, $u=y$, ne verranno le due Equazioni $(y-q)^2=g^2-(a-p)^2$, $(y-n)^2=d^2-(a-m)^2$, ossia

$y^2-2qy+P=0$, $y^2-2ny+Q=0$, posto $P=q^2-g^2+(a-p)^2$, e $Q=n^2-d^2+(a-m)^2$. Volendo ora eliminare la y, sottraggo una delle ottenute Equazioni dall' altra, e avuto così il risultato $2(q-n)y+Q-P=0$, moltiplico la prima delle esposte Equazioni per $y-2n$, la seconda per $y-2q$; sottraggo l' uno dall' altro i due risultati, che ne vengono, e avuta così l' Equazione $(P-Q)y-2(nP-qQ)=0$, elimino col mezzo di questa, e dell' altra $2(q-n)y+Q-P=0$ la y, e ne verrà $(P-Q)^2-4(q-n)(qQ-nP)=0$. Sostituisco in questa in vece delle P, Q i loro valori, otterremo finalmente un' Equazione in generale di 4.° grado, nella quale esisteranno tutte, e tre le incognite g, p, q, onde due di esse saranno nel Problema corrispondente a quello del (*n.*° 72) arbitrarie. Suppongasi per esempio $q=n$, e $p=0$: per la prima di queste supposizioni la precedente $(P-Q)^2-4(q-n)(qQ-nP)=0$ diviene $P-Q=0$, e per la seconda si ha $P-Q=d^2-g^2+2am-m^2=0$; dunque risultando $g^2=d^2+2am-m^2$, il circolo che risolve il posto Quesito sarà quello dell' Equazione $(y-n)^2=d^2+2am-m^2-x^2$, ove però si avverta dover essere $d^2+2am>m^2$, affinchè il raggio g sia reale: e però il cerchio domandato possibile. Vedesi agevolmente, che come nella presente ipotesi, così in tanti altri casi potrà il chiesto circolo risultare immaginario, e però impossibile il Problema proposto.

IV. Che se col mezzo dei due circoli $(u-n)^2=d^2-(t-m)^2$, $(y-q)^2=g^2-(x-p)^2$ si voglia risolvere il Problema del (*prec.* I); allora oltre l'Equazione $(P-Q)^2-4(q-a)(qQ-nP)=0$ corrispondente alla supposizione di $x=t=a$, e di $y=u$, se ne avrà un' altra simile, che dirò $(P1-Q1)^2-4(q-n)(qQ1-nP1)=0$ corrispondente alla supposizione di $x=t=b$, e di $y=u$, ove $P1=q^2-g^2+(b-p)^2$, $Q1=n^2-d^2+(b-m)^2$; ed una sola in questo caso delle

g, p, q rimarrà arbitraria, avvertendo quì pure, che tale arbitrarietà ha, siccome nel (*prec.* I), un limite, non potendosi essa quantità arbitraria voler tale, che soddisfaccia ad una terza supposizione della $x = t = c$, e della $y = u$; poichè, ciò facendo, i due circoli si confonderebbero tra loro perfettamente, e non si avrebbero punti d' intersecamento. Quì ancora, come nel (*prec.* III) potrà accadere per l' immaginarietà del cerchio domandato l' impossibilità del Problema.

V. Denominati p', q', g' i valori già determinati delle p, q, g, e P', Q' ciò che per questo divengono le P, Q, pongansi quì pure, come si è fatto nel (*prec.* II) nella $(P-Q)^2+4(q-n)(qQ-nP)=0$ (*prec.* III) i valori p', q', g', invece della p, q, g, e invece della a l' incognita z. Risultando da ciò $P'-Q'=2(m-p')z+d^2-g'^2+p'^2-m^2+q'^2-n^2$, $q'Q'-nP' = (q'^2-n^2)z^2+2(mn-p'q')z+d^2n^2-g'^2q'^2+p'^2q'^2-m^2n+q'^3-n^3$, vedesi che nella $(P'-Q')^2-4(q'-n)(q'Q'-nP')=0$ la z non ascenderà che al secondo grado, e si ridurrà essa quindi ad un' Equazione della forma $Mz^2+Nz+P=0$, Equazione, della quale si truova come nel (*prec.* II), che sono radici le precedenti quantità a, b (*prec.* III. IV).

VI. Nel Problema del (*n.°* 72) in quello del (*prec.* III), e nelle successive conseguenze de' (*prec.*ⁱ I, II, IV, V) si voglia che l' angolo delle coordinate non sia retto. Supposto perciò essere tali coordinate rapporto alla linea retta BK (*n.°* 72) le $AQ=r$, $QM=s$, e rapporto al cerchio GFK le $AR=\rho$, $RF=\sigma$, e rapporto all' altro cerchio del (*prec.* III) supposto essere r le nuove ascisse, s le nuove ordinate, e supposto finalmente essere $AH'=a$ (*n.i* 72, *prec.* III), e però $=z$ (*prec.* II, IV), si tirino dai punti M, G, F le MP, GH, FI perpendicolari alla ZV, e come nel (*n.°* 58) si ponga $MQ : MP :: 1 : j$, $MQ : PQ :: 1 : i$, ritenute per le coordinate AP, PQ, ec. le denominazioni dei (*n.i* 72, *prec.* III) avremo tan-

Fig. 70

to riguardo alla retta BG ($n.^o$ 72) quanto riguardo al circolo supposto nel (*prec.* III), avremo, dissi, $t = r + is$, $u = js$; e riguardo al circolo GFK avremo $x = \rho + i\sigma$, $y = j\sigma$ (I, II, $n.^o$ 59); e per conseguenza, giacchè risulta $s = \frac{m}{j-i} r + \frac{n}{j-i}$ ($n.^o$ 72), $(js - n)^2 = d^2 - (r + is - m)^2$ (*prec.* III), e si ha $(j\sigma - q)^2 = g^2 - (\rho + i\sigma - p)^2$, col discorso stesso de' citati ($n.^o$ 72, *prec.* I, III), vedremo, che posto AH' $= z$, e posto $\frac{jn - i(z-m)}{j^2+i^2} = \text{H}$, $\frac{n^2 - d^2 + (z-m)^2}{j^2+i^2} = \text{I}$, $\frac{jq - i(z-p)}{j^2+i^2} = \text{K}$, $\frac{q^2 - g^2 + (z-p)^2}{j^2+i^2} = \text{L}$, ottengonsi in corrispondenza le Equazioni

$$\left(\frac{jm}{j-i} z + \frac{jn}{j-i} - q\right)^2 = g^2 - \left(z + \frac{im}{j-i} z + \frac{in}{j-i} - p\right)^2,$$

$(\text{I}-\text{L})^2 - 4(\text{H}-\text{K})(\text{HL}-\text{IK}) = 0$. Da queste, allorchè la z si vuole quantità cognita, si otterrà nella presente ipotesi la soluzione dei Problemi dei ($n.^o$ 72, *prec.*[i] I, III, IV), operando su di esse come nei citati numeri; e allorchè la z si vuole incognita, si dedurranno quì pure delle conseguenze simili a quelle dei (*prec.*[i] II, V), si troverà cioè, che tanto nell' una, come nell' altra Equazione la z deve ascendere soltanto al 2.° grado: che questo difatti debba accadere nella prima delle Equazioni ora determinate, si conosce agevolmente dalla semplice ispezione dell' Equazione medesima; che poi ciò stesso debba succedere eziandio nell' Equazione seconda, lo troveremo coll' esegnire le dovute operazioni, e riduzioni. Posto difatti per maggiore semplicità $\frac{-i}{j^2+i^2} = \text{A}$, $\frac{jn+im}{j^2+i^2} = \text{B}$, $\frac{1}{j^2+i^2} = \text{C}$, $\frac{2m}{j^2+i^2} = \text{D}$, $\frac{n^2-d^2+m^2}{j^2+i^2} = \text{E}$, $\frac{jq+ip}{j^2+i^2} = \text{B}'$, $\frac{2p}{j^2+i^2} = \text{D}'$,

$\frac{e^2-d^2+E^2}{j^2+i^2}=E'$, poichè risulta $H=Az+B$, $I=Cz^2+Dz+E$, $K=Az+B'$, $L=Cz^2+D'z+E'$, otterremo
$I-L=(D-D')z+E-E'$, $H-K=B-B'$, $HL-IK=(AD'-AD+BC-B'C)z^2+(AE'-AE+BD'-B'D)z+BE'-B'E$, e per conseguenza l' indicata Equazione seconda riducendosi alla
$((D-D')z+E-E')^2-4(B-B')((AD'-AD+BC-B'C)z^2+(AE'-AE+BD'-B'D)z+BE'-B'E)=0$, non potrà in essa la z che ascendere al secondo grado. Dunque siano le coordinate ortogonali (*prec.* II, V), o non lo siano (*prec.* VI), il valore della z dipenderà sempre da un' Equazione non superiore al secondo grado, e però della forma $Mz^2+Nz+P=0$, e le radici di quest' Equazione saranno sempre le due ascisse AH, AL (*prec.* II, V), AH', AL' (*prec.* VI) corrispondenti ai due punti d' intersezione G, K della linea retta con la circonferenza, o delle due circonferenze fra loro; ed anche per conseguenza l' intersecamento di due cerchj potrà somministrare la costruzione di un' Equazione determinata di secondo grado.

74. *Scol.* 7.° Col mezzo della linea retta, e del Circolo, ossia con i principj della semplice Geometria elementare abbiam veduto potersi sempre costruire le Equazioni determinate di 1.°, e 2.° grado: ora con gli stessi soli principj si potranno costruire le Equazioni determinate di grado 3.°, e 4.°? veggiamolo.

I. Venga proposta a costruirsi l' Equazione $x^3=abc$, ove a, b, c esprimano tre rette determinate. Poichè pel (*n.*° 299. *Alg.*) una delle tre radici della data Equazione è sempre reale, ed essa sola è tale (*n.*° 375 *Alg.*), fissiamo l' attenzione su di questa, e denominatala x', vogliasi sopra della ZV tagliare, cominciando dal punto A la retta, che le corrisponde. Ora o si vuole che questa x' abbia un rapporto razionale, e già conosciuto col valore

Fig. 69, 70, 71

di altra retta essa pure già conosciuta, e che chiamerò, h, o non si vuole: nel primo di questi casi determinata quella aliquota comune alle rette x', h, da cui dipende la supposta relazione, basterà ripetere, principiando dal punto A, sulla ZV tale aliquota tante volte, quante il suo valore si contiene nel valore x', e nè verrà così determinato evidentemente il luogo geometrico della data Equazione. Sia per esempio $b = \frac{9a}{32}$, $c = \frac{3a}{2}$, onde $x^3 = \frac{27a^3}{64}$ sia l'Equazione data, e sia $x' = \frac{3a}{4}$: poichè tra la x', a esiste il rapporto razionale di $3:4.$, presa la comune aliquota $\frac{a}{4}$, replico questa, cominciando dal punto A tre volte, e avremo così sopra la ZV il chiesto luogo geometrico della quantita x'. Ogniqualvolta il termine abc è un cubo perfetto; è chiaro che la x' deve sempre avere un rapporto razionale, ed attualmente determinabile con le quantità a, b, c già note. Dunque ogniqualvolta abc sia una terza potenza esatta, la sola Geometria elementare potrà sempre somministrare la costruzione della supposta $x^3 = abc$.

II. Sia ora abc non cubo perfetto. In tale supposizione essendo x' necessariamente incommensurabile, e quindi non avendo la retta, che gli corrisponde, relazion razionale con alcuna delle rette, che si suppongono cognite; la costruzione della $x^3 = abc$ non potrà effettuarsi con l'indicato precedente metodo. Dovendo pertanto ricorrere ad altro artifizio, o cercherò con questo immediatamente la retta, che dev' essere $= x'$, o cercherò tal linea mediatamente, determinando da prima una retta h con la quale essa linea x' abbia un rapporto attualmente determinabile, e pel cui mezzo si possa inseguito, servendoci per esempio del me-

todo sovraccennato, determinare la linea medesima x'. Cercando in primo luogo questa determinazione immediatamente, osservo, che, siccome della retta, che si chiede, conoscesi nella ZV, l' estremo A, non dovremo per la costruzione domandata che truovare l' altro estremo, che supporrò essere H. Ora questo estremo si determina truovando immediatamente sulla ZV il punto H, che lo costituisce, o truovando da prima un altro punto G (Fig. 69, 70, 71) da lui diverso, da cui conducendo, sotto una direzione stabilita, alla ZV una retta GH, essa lo determini. Ma di queste due maniere di determinazione del punto H la prima si riduce alla seconda col supporre semplicemente la lunghezza della retta GH $=0$. Dunque basterà fissar l' attenzione solamente sopra questa maniera seconda; e ciò facendo, si osservi, che siccome presentemente si vuole la determinazione della $x' = \sqrt[3]{abc}$ mediante la sola Geometria Elementare, e siccome la Geometria Elementare non conoscendo altre linee, che le rette, e le circolari, non può determinare que' punti, che le vengon richiesti, che col descrivere, e col fare incontrare fra loro tali linee; quindi ne segue che l' indicato punto G dovrà esso pure nel caso nostro determinarsi solamente con descrivere, e col fare incontrar tra di loro o due rette, o due circonferenze, od una retta, ed una circonferenza.

III. In conseguenza di ciò cominciam dal supporre, che si voglia la determinazione del punto richiesto con la descrizione, e l' incontro di due rette, e queste siano le due BG, DG (Fig. 69). Truovato così in G il primo punto, che si domanda, poichè per ottenere sulla ZV l'altro H, e quindi scuoprire la AH$=x'$, deve condursi da G una retta GH con una direzione già stabilita (*prec.* II), e però già cognita; e poichè inoltre, qualunque

siansi le direzioni delle BG, DG, gli angoli delle loro coordinate si possono scegliere a piacimento, senza che perciò esse rette rimangano cambiate (III n.° 52); porremo in primo luogo questi angoli uguali all' angolo che fa la GH con la AH, perciò porremo tanto le ordinate della BG, come quelle della DG parallelle alla GH. Siano in tale supposizione $u = mt + n$, $y = px + q$ (n.° 68) le rispettive Equazioni delle due rette BG, DG; pel (IV n.° 69) avremo evidentemente il nostro valore $x' = \frac{n-q}{p-m}$, e però $x - \frac{n-q}{p-m}$ dovrà essere un divisore esatto del primo membro dell' Equazione $x^3 - abc = 0$. Imperciocchè avendosi $x'^3 - abc = 0$, e però $x'^3 = abc$, ne verrà $x^3 - abc = x^3 - x'^3$; ma $x^3 - x'^3$ è divisibile esattamente per $x - x'$. Dunque dovrà essere ancora $x^3 - abc$ divisibile esattamente per $x - x'$, e quindi per $x - \frac{n-p}{p-m}$.

IV. Sia in secondo luogo richiesto che tanto la BG, come la DG siano state descritte con altre linee di ascisse diverse dalla ZV, e con angoli fra le coordinate diversi dall'angolo AHG, e in tale supposizione sia relativamente alla BG la retta XY l' asse delle assisse, con cui si vuole essa descritta, siano $CT = r$, $TM = s$ le coordinate, sia del valore k l' angolo CTM fra le r, s, e sia $s = \mu r + \nu$ l' Equazione corrispondente. Condotta dal punto M alla ZV la MP parallela alla GH, ritengasi $AP = t$, $PM = u$, ed $u = mt + n$ l' Equazione fra le t, u; si conservino rapporto alle quantità, che nella trasformazione delle coordinate si pongono note, quelle denominazioni, che furono stabilite nel (n.° 58), e dalle formole colà ritrovate avremo evidentemente $t = d + fr + is$, $u = e + gr + js$. Ora dal punto A si conduca la AF parallela alle ordinate MP, dai punti F, B le FE, BK parallele al-

le ordinate MT, e si ponga $CE = \alpha$, $EF = \beta$, $CK = \gamma$, $KB = \delta$: dall'Equazione $u = mt + n$ apparisce, che quando $t = o$, si ha $u = n$, ed in corrispondenza $r = \alpha$, $s = \beta$, e quando $u = o$, si ottiene $t = -\frac{n}{m}$, ed in corrispondenza $r = \gamma$, $s = \delta$.

Dunque dalle Equazioni $t = d + fr + is$, $u = e + gr + js$, avremo $d + f\alpha + i\beta = o$, $e + g\alpha + j\beta = n$

$$d + f\gamma + i\delta = -\frac{n}{m},\ e + g\gamma + j\delta = o;$$

ma dalla $s = \mu r + \pi$ si ritrae $\beta = \mu\alpha + \pi$, $\delta = \mu\gamma + \pi$; dunque dal paragone di queste con le rispettive equazioni $d + f\alpha + i\beta = o$, $e + g\gamma + j\delta = o$ ricavandosi $\alpha = -\frac{d + i\pi}{f + i\mu}$, $\beta = \frac{f\pi - d\mu}{f + i\mu}$, $\gamma = -\frac{e + j\pi}{g + j\mu}$ $\delta = \frac{g\pi - e\mu}{g + j\mu}$,

si avrà $n = e + g\alpha + j\beta = e - \frac{g(d + i\pi)}{f + im\mu} + \frac{j(f\pi - d\mu)}{f + i\mu}$,

$$m = -\frac{n}{d + f\gamma + i\delta} = -\frac{\left(e - \frac{g(d + i\pi)}{f + i\mu} + \frac{j(f\pi - d\mu)}{f + i\mu}\right)}{d - \frac{f(e + j\pi)}{g + j\mu} + \frac{i(g\pi - e\mu)}{g + j\mu}}$$

Denominate con le lettere stesse segnate con un apice le quantità simili alle precedenti, che appartengono all'altra retta DG, avremo evidentemente,

$$q = e' - \frac{g'(d' + i'\pi')}{f' + i'\mu'} + \frac{j'(f'\pi' - d'\mu')}{f' + i' - \mu'}$$

$$p = -\frac{\left(e' - \frac{g'(d' + i'\pi')}{f' + i'\mu'} + \frac{j'(f'\pi' - d'\mu')}{f' + i'\mu'}\right)}{d' - \frac{f'(e' + j'\pi')}{g' + j'\mu'} + \frac{i'(g'\pi' - e'\mu')}{g' + j'\mu'}}.$$

Dunque denotati per brevità di scrivere con le lettere A, B, A', B' i valori ora ritrovati delle m, n, p, q, e sostituiti essi nella espressione $x - \frac{n - q}{p - m}$, dovrà pel (*prec.* III) sotto questa seconda considerazione il primo membro della $x^3 - abc = o$

essere divisibile esattamente per $x - \frac{B - B'}{A' - A'}$, e per conseguenza tanto in questo come nel caso del (*prec.* III) il primo membro $x^3 - abc$ dovrà contenere un fattore di primo grado, in cui la parte, che si considera cognita, è un espressione razionale dei coefficienti delle Equazioni inservienti alla descrizione delle supposte due rette BG, DG.

V. Vogliasi ora, che la descrizione, e l' incontro di una retta con una circonferenza, o di due circonferenze fra loro determini il punto G (Fig. 70, 71), e le coordinate di tutte queste linee siano primieramente parallele alla GH (*n.*° 72, III. *n.*° 73), od alla GH', (VI. *n.*° 73). Siccome qualunque sia l' angolo AH'G, il valore della AH', o della AH, considerato come incognito, dipende sempre da un' Equazione di grado non superiore al 2.° (II, V, VI. *n.*° 73), e siccome nel nostro caso $AH' = x'$, ne segue, che la x' sarà radice di un' Equazione della forma $Mx^2 + Nx + P = 0$, ove i coefficienti M, N, P saranno quantità espresse razionalmente per mezzo dei coefficienti, che esistono nello Equazioni della linea retta, e dei circoli presentemente voluti, e che supporremo essere quelli dei (*n.*° 72; III, IV. *n.*° 73). Ora avendosi $Mx'^2 + Nx' + P = 0$ si ricava $P = -Mx'^2 - Nx'$, e però $Mx^2 + Nx + P = M(x^2 - x'^2) + N(x - x')$; dunque essendo quest' ultima quantità divisibile esattamente per $x - x'$, tale sarà ancora la $Mx^2 + Nx + P$; ma per essere la x' radice eziandio della $x^3 - abc = 0$ (*prec.* I), anche il primo membro di quest' ultima Equazione può dividersi esattamente per $x - x'$ (*prec.* III). Dunque avendosi nelle due quantità $x^3 - abc$, $Mx^2 + Nx + P$ lo stesso fattore $x - x'$; coll' instituire sopra loro la ricerca del massimo comun divisore, troverò, che questo massimo divisore esiste realmente, e troverò tale essere o l' indicato fattore di primo

grado $x-x'$, o la quantità di secondo grado $x'+\frac{Nx}{M}+\frac{P}{M}$; ma l'operazione, per cui si effettua simile ricerca, non esige alcuna estrazion di radice (*n.*i 109, 111 *Alg.*). Dunque dovendo l' indicato massimo comun divisore avere i coefficienti i quali siano tante espressioni commensurabili de' coefficienti delle x^3-abc, Mx^2+Nx+P; ne viene, che nella ipotesi presente il primo membro della $x^3-abc=0$ dovrà conteuere due fattori uno di primo, e l'altro di secondo grado, i coefficienti dei quali essendo tante espressioni razionali delle quantità abc, M, N, P, saranno ancora tante espressioni razionali delle a, b, c, e dei coefficienti, che appartengono alle Equazioni della supposta linea retta, e dei supposti circoli.

VI. Si voglia, che come nel (*prec.* IV), tanto la retta BG, come ciascuno dei circoli GFK, GKM siano stati descritti con linee di ascisse, e con coordinate diverse dalle considerate nel (*prec.* V), e fissando l' attenzione sopra i due circoli della (Fig. 71), giacchè quello che si dice di essi, dicesi ancora della linea retta combinata col circolo; suppongasi che il circolo MGK sia stato descritto con l' asse di ascisse XY, e le coordinate BP, PM, e l' altro GFK con l'asse di ascisse TU, e le coordinate CQ, QN. Supposto $BP=\tau$, $PM=\upsilon$, $CQ=\xi$, $QN=\zeta$, e denominate ι, ι', η, η', μ, μ', ν, ν' le quantità, che giusta il (*n.*° 58; II, V, *n.*° 65, VI *n.*° 73) vengono date dalla posizione, che si vuole, delle XY, TU relativamente ai rispettivi circoli, e dalla grandezza degli angoli corrispondenti; le Equazioni di essi cerchj pei citati (II, V. *n.*° 65) saranno le $(\iota\upsilon-\nu)^2=d^2-(\tau-\eta\upsilon-\mu)^2$, $(\iota'\zeta-\nu')^2=g^2-(\xi+\eta'\zeta-\mu')^2$. Cognita ora essendo ancora la posizione della ZV, su cui deve determinarsi la $AK'=x'$, e conside-

randosi cognito l'angolo AH'G, si prenda questa ZV come nuova linea di ascisse relativamente ad amendue i circoli, e ponendo sì nell'uno, che nell' altro le nuove ordinate pararelle alla GH', si conducano con tale parallelismo le MR, NS, e si ponga $AR = r$, $RM = s$, $AS = \rho$, $SN = \sigma$. Denominate d', d'', e', e'', ec. le quantità corrispondenti alle stabilite nel ($n.^o$ 58), poichè rapporto al primo cerchio si ha $\pi = d' + f'r + i's$, $\nu = e' + g'r + j's$, e rapporto al secondo $\xi = d'' + f''\rho + i''$, $\zeta = e'' + g''\rho + j''\sigma$, (II. $n.^o$ 59, $n.^o$ 58), si sostituiscano questi valori nelle precedenti due Equazioni, e ne risulteranno altre due, le quali ridotte opportunamente dovranno pei (II, V. $n.^o$ 65, VI. $n.^o$ 73) acquistare la forma $(As - K)^2 = d^2 - (r + Bs - H)^2$, $(A'\sigma - K')^2 = g^2 - (\rho + B'\sigma - H')^2$, ove le quantità A, A', B, B', H, H', K, K' dovranno essere tante espressioni razionali delle supposte precedentemente ϵ, ϵ', π, π', ec. d', d'', e', e'', ec.; ma allorquando nel (*prec.* V) fu presa a bel principio la ZV come asse di ascisse riguardo ad entrambi i circoli, e si posero sì nel uno che nel altro le ordinate parallele alla GH', ed il principio delle ascisse nello stesso punto A, si ebbero in corrispondenza le due Equazioni $(js - n)^2 = d^2 - (r + is - m)^2$, $(j\sigma - q)^2 = g^2 - (\rho + i\sigma - p)^2$ (VI, $n.^o$ 73). Dunque dovendo essere evidentemente queste due, identiche all'altre due Equazioni in r, s, ed in ρ, σ ultimamente truovate; ne segue, che sarà $j = A = A'$, $i = B = B'$, $m = H$, $n = K$, $p = H'$, $q = K'$. Si pongano ora nei coefficienti M, N, P della $Mx^2 + Nx + P = o$ (*prec.* V) in luogo delle i, j, m, p, n, q i valori presentemente determinati A, B, H, H' ec. tali coefficienti diventando perciò tante espressioni razionali delle ϵ, ϵ', π, π', ec. d', d'', e', e'', ec., rinnovato il discorso del (*prec.* V), vedremo, che in questa ipotesi il primo membro della $x^3 - abc = o$ deve contenere un fat-

fattore o di primo grado $x - x'$, o di secondo $x^2 + \frac{N}{M} x + \frac{P}{M}$, i coefficienti del quale contengono in una maniera commensurabile le indicate quantità v, v', v'', ec. d', d'', e', e'', ec., e le a, b, c.

VIII. In conseguenza di quanto si è detto nei (*prec.* II, ec. VI) apparisce, che ogni qualvolta si voglia il valore della $x' = \sqrt[3]{abc}$ determinabile col mezzo solamente di linee rette, e di cerchj, devrà sempre il primo membro della $x^3 - abc = 0$ essere spezzabile in due fattori della forma $x - D$, $x^2 + Ex + F$, cosicchè avremo $x^3 - abc = (x - D)(x^2 + Ex + F) = 0$, ove i coefficienti D, E, F saranno pei (*prec.* III, ec. VI) tante espressioni razionali delle quantità a, b, c, e dei coefficienti esistenti in quelle Equazioni, dalle quali dipende la determinazione, e la descrizione di quelle linee rette, e di que' circoli, i quali co' loro incontri somministrano il punto G (Fig. 69, 70, 71), e quindi il valore geometrico della x'. Ma la quantità $(x - D)(x^2 + Ex + F)$ diviene zero, tanto se x sia tale, che $x - D = 0$, come se sia tale, che $x^2 + Ex + F = 0$. Dunque nella nostra supposizione le radici della $x^3 - abc = 0$ altro non saranno che le radici di due Equazioni, l' una di primo, l' altra di secondo grado, i coefficienti delle quali saranno tante espressioni commensurabili delle accennate a, b, c, e degli accennati coefficienti. Ora dalla risoluzione delle indicate due Equazioni ottenendosi $x = D$, $x = -\frac{E}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E^2}{4} - F\right)}$, in niuno di questi valori s' introduce il segno $\sqrt[3]{\ }$, segno d' altronde, il quale per la ipotesi fatta (*prec.* II) esister deve necessariamente nel valore della x'. Dunque, affinchè col mezzo della sola Geometria elementare

(*prec.* II) possa determinarsi il chiesto valore della x'; poichè questo altro non è che uno dei tre D, $\frac{E}{2} + \sqrt[3]{\left(\frac{E^2}{4} - F\right)}$, $-\frac{E}{2} - \sqrt[3]{\left(\frac{E^2}{4} - F\right)}$, dovrà l' accennato segno esistere in qualcuno dei valori de' coefficienti nelle Equazioni delle rette, e de' circoli, che si descrivono. Esista esso pertanto per esempio nel coefficiente m della Equazione $u = mt + n$ (*prec.* III), e sia essa $\sqrt[3]{A}$, rappresentandosi dalla A un'espressione algebraica delle a, b, c, la quale non sia cubo perfetto. Poichè questo valore $\sqrt[3]{A}$ contiene necessariamente il segno $\sqrt[3]{\ }$, ciò stesso, che nei (*prec.* III, ec. VI) se è detto della determinazione geometrica della $x' = \sqrt[3]{abc}$, dicesi evidentemente ancora della determinazione geometrica del valore di $\sqrt[3]{A}$. Dunque non potrà tal valore con la sola Geometria elementare ritrovarsi, e quindi non potrà ottenersi il valore di m, e però descriversi la retta della Equazione $u = mt + n$, se non se conoscendo prima il valore geometrico di un' ulteriore quantità avente essa pure in se un radicale terzo essenzialmente tale, che dirò $\sqrt[3]{B}$. La determinazione geometrica di quest' ulteriore quantità avente in se la $\sqrt[3]{B}$ non potrà per le solite ragioni ottenersi neppure essa con la semplice Geometria elementare, quando non si conosca da prima un' altra quantità, nel cui valore si contenga al solito un altro radicale terzo. Così dunque devendosi proseguire all' infinito; la sola Geometria elementare non potrà mai giungere a deter-

minare geometricamente il valore di alcuna delle quantità sovraccennate aventi in se un radicale terzo; quello stesso, che si è detto presentemente nella ipotesi che il radicale terzo $\sqrt[3]{A}$ entri nel valore di m, si dice in egual modo, mentre si volesse, che un radicale simile entrasse in un altro qualunque de' coefficienti delle equazioni, che attualmente consideriamo. Dunque allorquando abc non è cubo perfetto (*prec.* II), con la Geometria elementare solamente non potremo giammai determinare geometricamente, e immediatamente sulla ZV la porzione $AH = x'$.

VIII. Ma se non la x' immediatamente, non potrebbe sulla ZV ritrovarsi con la sola Geometria elementare quest'altro valore, che nel (*prec.* II) si è denominato h, per mezzo del quale si possa in seguito scuoprire con gli stessi soli principj il valore geometrico della x'? Rispondo, che nò. Imperciocchè contenendosi nel valore della x' necessariamente la $\sqrt[3]{}$ (*prec.* II), e dovendo tal valore venire determinato mediante il valore della h; dovrà l'indicato radicale $\sqrt[3]{}$ esistere necessariamente o nel valore stesso della h, o nella espressione del rapporto tra le x', ed h; ma quando esso radicale esiste in h; nella guisa medesima, con cui si è veduta impossibile la determinazione immediata con le sole linee rette, e le circolari del valore geometrico della x' (*prec.* II, ec. VII); truovasi ancora impossibile la determinazione immediata con gli stessi mezzi del valore geometrico della h; e si truova nello stesso modo impossibile mediante la sola Geometria elementare la determinazione del valore geometrico della x' dal valore geometrico della h, quando l'esposto radicale esiste nell' espressione del rapporto tra le x', ed h.

Dunque nè immediatamente, nè mediatamente potrà la sola Geometria elementare somministrare il valore geometrico della supposta $x' = \sqrt[3]{abc}$, e quindi non potrà neppure somministrare la costruzione della Equazione $x^3 = abc$: ogniqualvolta abc non sia un cubo perfetto.

IX. L' Equazione, di cui si vuole la costruzione geometrica sia la $x^3 + ax + bcx + def = 0$. Denominate x', x'', x''' le sue radici, poichè, come nei (*prec.* III, V), si trova che il suo primo membro è divisibile esattamente per ciascuno dei binomj $x - x'$, $x - x''$, $x - x'''$, si vedrà non dificilmente dover essere $x^3 + ax + bcx + def = (x - x')(x - x'')(x - x''')$. Ora o nel valore di una di queste radici, per esempio della x' si contiene il radicale $\sqrt[3]{\ }$, o non si contiene. Se no, allora detto radicale non esiste neppure nel valore delle altre radici x'', x''': imperciocchè effettuata la divisione del primo membro della Equazione data per $x - x'$, e supposto $\frac{x^3 + ax + bcx + def}{x - x'} = x^2 + Ex + F$, neppure i coefficienti E, F conterranno evidentemente alcun radicale terzo; ma risultando $x^2 + Ex + F = (x - x'')(x - x''')$, le x'', x''' sono radici ancora della Equazione $x^2 + Ex + F = 0$. Dunque la soluzione di questa non involgendo alcuna estrazione di radice terza, nè la x'', nè la x''' dovranno nel loro valore contenere il radicale $\sqrt[3]{\ }$. In conseguenza di ciò si vede, che mentre una delle radici della Equazione ora supposta, essendo razionale, o contenendo nel suo valore il solo radicale $\sqrt[2]{\ }$, sia determinabile con la sola Geometria elementare; anche le altre due radici, quando siano reali, saranno determinabili esse pu-

re nella stessa guisa, e quindi la Equazione data sarà nella presente ipotesi costruibile col mezzo soltanto della linea retta, e del cerchio. Che se nel valore della x già ridotta all' espressione più semplice si contiene l' accennato radicale $\sqrt[3]{}$; con lo stesso precedente discorso trovandosi dovere tal radicale esistere ancora nei valori delle x'', x''', con i raziocinj medesimi de' (*prec.* II, ec. VIII) vedremo che niuna di queste radici può mediante la sola retta, e il solo cerchio determinarsi, e però che è in questa supposizione seconda impossibile con la sola Geometria elementare la costruzione della Equazione data.

Ora i casi ne' quali il valore della x' non contiene il radicale $\sqrt[3]{}$ sono particolari, e pochissimi in confronto di quelli, ne' quali lo contiene. Dunque dalla supposta comprendendosi tutte le Equazioni di 3.° grado, concluderemo, che, eccettuati gli accennati pochi casi, tali Equazioni non possono costruirsi con la sola Geometria elementare.

X. Finalmente le Equazioni determinate di 4.° grado dal (*n.*° 303. *Alg.*) apparisce essere tali, che si potrebbero benissimo costruire con la sola Geometria elementare, mentre con lo stesso mezzo si potesse determinare la quantità t colà supposta; ma essendo $t^2 = z'$; e z' radice di un' Equazione di grado terzo (*cit.*° 303. *Alg.*), tale determinazione è in generale impossibile (*prec.* II, ec. IX). Dunque è ancora impossibile, che la linea retta, ed il circolo solamente possano somministrare in generale la costruzione della Equazione di quarto grado. Simile impossibilità però si vede, che dipende soltanto da quella delle Equazioni di grado terzo, onde in tutti quei casi particolari, ne' quali si può giusta il (*prec.* IX) costruire l' indicata Equazione in z si potrà eziandio costrui-

re la corrispondente Equazione di quarto grado.

È per queste impossibilità, che inacessibili alla Geometria elementare truovaronsi i famosi Problemi del raddoppiamento del cubo, della trisezione generale dell'arco circolare, ec.; ed essendo dato soltanto alla Geometria superiore il poter sempre costruire le Equazioni di terzo, e quarto grado, per essa solamente potremo sempre risolvere gli accennati Problemi.

APPENDICE

ALL' ALGEBRA

PARTE SECONDA

DELLE SERIE ALGEBRAICHE E DELLE GEOMETRICHE.

CAPO I.

Delle Serie in generale, e delle Serie aritmetiche.

75. *Def.* 1. Col nome di *Serie*, o *Progressioni* intendesi una congerie di Numeri, i quali si succedono con una legge determinata. I Numeri poi che la formano, chiamansi *Termini*, e la serie dicesi *finita*, se il numero de' termini è finito; *infinita* se l' accennato numero de' Termini si considera come potratto all'infinito. La formola Newtoniana (*n.*° 203. *Alg.*) ci somministra l' esempio di una serie finita, quando l' esponente della potenza, a cui si eleva il binomio, è numero intero, e positivo, infinita, quando l' indicato esponente non è tale.

76. *Def.* 2. *Funzione* di una, o di più quantità dicesi un' espressione, nella quale la supposta, o le supposte quantità si contengono in una maniera qualsivoglia o sole, od insieme con altre quantità da loro diverse. Saranno perciò funzioni della x le due espressoni x^m, $\frac{x+a}{bx}$, lo saranno delle x, z le altre xz, $ax^2+\frac{bz}{x}+c$. Per denotare in generale le funzioni ci serviremo della lettera f, ponendo appresso a lei tra due parentesi, e sepa-

te con virgole le lettere, di cui la quantità data è funzione. Le precedenti x^m, $\frac{x+a}{bx}$ verranno perciò comprese dall'espressione generica $f(x)$, le altre xz, $ax^2+\frac{bz}{x}+c$ dall'altra $f(x, z)$.

77. *Def.* 3. Se una serie nasca dallo svilupparsi una funzione di una, o più quantità tal Funzione suol dirsi *generatrice* della serie medesima. Sarà quindi la quantità $(a+x)^m$ funzione generatrice della serie $a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}x^2$ + ec.

78. *Def.* 4. Avuto riguardo alla funzione generatrice, le serie, che ne derivano, si dividono in *convergenti*, *divergenti*, e *parallele*. Convergenti sono quelle, le quali, quanto più progrediscono, tanto si accostano di più al valore della funzione generatrice; divergenti quelle, le quali tanto più se ne allontanano, quanto più cresce il numero de' loro termini; e parallele quelle, le quali, per quanto progrediscano, conservano sempre dalla funzione un' eguale distanza.

Data per esempio una funzione $\frac{a}{b+x}$, coll'eseguire attualmente la divisione, otterremo la serie

$$\frac{a}{b}-\frac{ax}{b^2}+\frac{ax^2}{b^3}-\frac{ax^3}{b^4}+\text{ec.}\mp\frac{ax^{n-2}}{b^{n-1}}\pm\frac{ax^{n-1}}{b^n}\mp\text{ec.}, \quad (I)$$

prendendosi il segno superiore, quando n è dispari, l'inferiore quando n è pari. Ora se nell'effettuare la divisione, ci fermiamo al primo quoto, oppure subito dopo il secondo, o dopo il terzo, ec., ottienesi in corrispondenza.

$$\frac{a}{b+x}=\frac{a}{b}-\frac{ax}{b(b+x)},$$

$$\frac{a}{b+x}=\frac{a}{b}-\frac{ax}{b^2}+\frac{ax^2}{b^2(b+x)},$$

$$\frac{a}{b+x}=\frac{a}{b}-\frac{ax}{b^2}+\frac{ax^2}{b^3}-\frac{ax^3}{b^3(b+x)},$$

ec.

$$\frac{a}{b+x}=\frac{a}{b}-\frac{ax}{b^2}+\frac{ax^2}{b^3}-\frac{ax^3}{b^4}+\text{ec.}\mp\frac{ax^{n-2}}{b^{n-1}}\pm\frac{ax^{n-1}}{b^n}$$
$$\mp\frac{ax^n}{b^n(b+x)}.$$

Dunque se nella serie (I) teniam conto solamente di uno, ovvero di due, di tre, ec., e in generale di n termini, le differenze dalla funzione generatrice $\frac{a}{b+x}$ saranno rispettivamente le quantità $\frac{a}{b+x}\times\frac{x}{b}$, $\frac{a}{b+x}\times\frac{x^2}{b^2}$, $\frac{a}{b+x}\times\frac{x^3}{b^3}$, ec. $\frac{a}{b+x}\times\frac{x^n}{b^n}$; ma allorquando sia $x<b$, tali quantità, a cagione di $\frac{x}{b}<1$, vanno sempre scemando successivamente di valore, mentre $x>b$; risultando $\frac{x}{b}>1$, le quantità medesime vanno sempre crescendo, e sono costantemente dello stesso valore, quando $x=b$. Dunque nel primo di questi tre casi la serie (I) sarà convergente, sarà divergente nel secondo, e nel terzo parallela.

79. *Def.* 5. Disegnato in generale con la lettera n il numero dei termini, de' quali si tien conto, cominciando dal primo, in una serie data; si denomina *Termine generale* di essa serie una funzione della n tale, che col porre in luogo della n medesima i numeri 1, 2, 3, ec., si ottengono in corrispondenza i termini 1.°, 2.°, 3.°, ec.: ed una funzione della stessa n tale, che mentre si faccia

$n = 1$, ovvero $= 2$, od $= 3$, ec., ne risulti in corrispondenza il primo, oppure la somma de' primi due, o la somma de' primi tre, ec. termini, questa funzione, dissi, si chiama *Somma generale* delle serie. Poichè a cagion d' esempio $2n - 1$, n^2 sono due funzioni di n, dalle quali col porre successivamente $n = 1, 2, 3$, ec., ricavansi rispettivamente tutti i successivi termini, e tutte le somme successive della serie de' numeri dispari 1, 3, 5, 7, ec.; esse funzioni ne costituranno, la prima il termine, e la seconda la somma generale.

80. *Scol.* 1.° Per indicare il termine generale di una serie ci serviremo della lettera T, e della lettera S per indicarne la somma. Per accennare ciocchè divengono queste quantità T, S, quando si pone $n = 1, 2, 3$, ec. n, scriveremo rispettivamente T_1, S_1, T_2, S_2, T_3, S_3, ec. T_n, S_n. Nella precedente serie de' numeri dispari (n.° 79) avremo perciò $T = 2n - 1$, $S = n^2$, e quindi $T_1 = 1$; $S_1 = 1$; $T_2 = 3$, $S_2 = 4$; $T_3 = 5$, $T_3 = 9$, ec. $T_n = 2n - 1$, $S_n = n^2$.

81. *Cor.* I. È chiaro che in qualunque serie sarà $T_n = T$, $S_n = S$, e che $T_1 = S_1$ (n.i 79, 80).

II. Poichè pei cit. (n. 79, 80) si ha

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \text{ec.} + T_{n-1} + T_n \qquad \text{(II)}$$

$$S_{n-1} = T_1 + T_2 + T_3 + \text{ec.} + T_{n-1},$$

sottraendo, otterremo $S_n - S_{n-1} = T_n$, e però $T = S_n - S_{n-1}$ (*prec.* I). Dunque se nella somma generale di una serie si collochi $n - 1$ invece di n, quindi si sottragga da essa somma il risultato che ne viene; la differenza, che ne risulta, sarà il termine generale della serie medesima. Nell' esempio del (n.° 80) avremo difatti

$$S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1 = T.$$

III. Sia $S_n = A + f(n)$, essendo A una quantità indipendente affatto dal numero n. Avendosi da ciò $S_{n-1} = A + f(n-1)$ sarà $T = S_n - S_{n-1} = f(n) - f(n-1)$. Dunque se nel valore della somma generale si contiene in istato di addizione una quantità A indipendente da n, questa quantità mancherà dal valore del corrispondente termine generale.

82. *Def.* 6. Posto nel termine T_n il numero $n+1$ invece di n, e sottratto dal termine, che ne nasce, T_{n+1} l'altro T_n, il risultato che se ne ottiene, e che denoterò con la lettera D, ossia D_n, onde $D = D_n = T_{n+1} - T_n$, chiamasi *differenza prima*. Collocato $n+1$ in luogo di n nella espressione D_n, si chiama *differenza seconda* il risultato $D_{n+1} - D_n$, e denoterò questo con la stessa lettera D, ossia D_n, aggiunta la cifra (2) nel luogo dell'esponente, onde sarà $D^{(2)} = D_n^{(2)} = D_{n+1} - D_n$. Ricavata nello stesso modo dalla espressione $D_n^{(2)}$ l'altra $D_{n+1}^{(2)}$, si denomina *differenza terza* il risultato $D_{n+1}^{(2)} - D_n^{(2)}$, e disegnata essa per mezzo della solita D, ossia D_n, appostavi la cifra (3), avremo $D^{(3)} = D_n^{(3)} = D_{n+1}^{(2)} - D_n^{(2)}$. Così proseguendo a determinare le differenze ulteriori, e a denotarle in una simil maniera, avremo le *differenze quarta*, *quinta*, ec. nei risultati $D_{n+1}^{(3)} - D_n^{(3)} = D^{(4)} = D_n^{(4)}$, $D_{n+1}^{(4)} - D_n^{(4)} = D^{(5)} = D_n^{(5)}$, ec.

83. *Scol.* 2.° Col supporre successivamente $n =$

1, 2, 3, ec., e con la successiva sostituzione vedesi, che otterremo

$$D_1 = T_2 - T_1,$$

$$D^{(2)}_1 = D_2 - D_1 = T_3 - 2T_2 + T_1,$$

(III) $$D^{(3)}_1 = D^{(2)}_2 - D^{(2)}_1 = T_4 - 3T_3 + 3T_2 - T_1,$$

$$D^{(4)}_1 = D^{(3)}_2 - D^{(3)}_1 = T_5 - 4T_4 + 6T_3 - 4T_2 + T_1,$$

ec.

$$D^{(p)}_1 = T_{p+1} - pT_p + \frac{p(p-1)}{2} T_{p-1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} T_{p-2}$$

$+$ ec. $\mp pT_2 \pm T_1$, prendendosi il segno superiore, quando p è numero pari, l'inferiore quando p è dispari. Così si trova

$$D^{(p)}_2 = T_{p+2} - p\,T_{p+1} + \frac{p(p-1)}{2} T_p - \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} T_{p-1}$$
$$+ \text{ec.} \mp pT_3 \pm T_2$$

$$D^{(p)}_3 = T_{p+3} - pT_{p+2} + \frac{p(p-1)}{2} T_{p+1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} T_{p-1}$$
$$+ \text{ec.} \mp pT_4 \pm T_3$$

e in generale

(IV) $$D^{(p)} = T_{p+n} - pT_{p+n-1} + \frac{p(p-1)}{2} T_{p+n-2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} p + {}_{n-3} + \text{ec.} \mp pT_{n+1} \pm T_n$$

84. *Def.* 7. Serie, o Progressione *Aritmetica* dicesi quella, nella quale la differenza di due termini successivi è costantemente la medesima.

85. *Cor.* I. Chiamato a il termine primo di una serie aritmetica, e d la differenza costante, avremo $T_1 = a$, $T_2 = T_1 + d$, $T_3 = T_2 + d$, T_4

$= T_3 + d$, ec. $T_n = T_{n-1} + d$, e per conseguenza

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \text{ec. } a+(n-1)d \qquad (V)$$

sarà una qualunque serie aritmetica, di cui

$$T_n = a + (n-1)d$$

sarà il termine generale.

II. La progressione (V) sarà crescente, o decrescente, secondochè la differenza d è positiva, o negativa.

III. Posto $a = 1$, se si faccia $d = 1$, oppure $= 2$, dalla (V) ne verranno in corrispondenza la serie de' numeri naturali, e quella de' numeri dispari, risultando $T_n = 1+n-1 = n$, $T_n = 1+(n-1)2 = 2n-1$ il rispettivo termine generale. Che se, posto $a=0$, facciasi $d = 2$; ne verrà la serie de' numeri pari, de' quali il termine generale sarà $T_n = 2n - 2$.

86. *Teor.* 1.° In una serie aritmetica (V) la somma dei due termini estremi uguaglia la somma di due altri termini quali si vogliono presi a distanza uguale dagli estremi medesimi.

Dim. Chiamato T_p un termine qualunque della progressione (V) diverso dal primo $T_1 = a$, e dall' ultimo $T_n = a + (n-1)d$, occuperà esso evidentemente, cominciando dal primo, il posto $p$esimo della progressione: Dunque il termine della serie medesima, che truovasi dall' ultimo a quella distanza stessa, a cui dal primo si truova il supposto T_p, sarà il termine $T_{n-(p-1)}$. Ora pel (*n.*° 80, I *n.*° 85) abbiamo $T_p = a+(p-1)d$, $T_{n-(p-1)} = a+(n-p)d$: dunque sarà $T_p + T_{n-(p-1)} = 2a + (n-1)d$; ma anche $T_1 + T_n = 2a + (n-1)d$. Dunque risultando $T_p + T_{n-(p-1)} = T_1 + T_n$, ne segue, che ec.

87. *Scol.* 3.° I. Allorchè n è numero pari, pa-

ri essendo evidentemente il numero dei termini, la serie (V) ne conterrà due di mezzo, tali essendo i due $T_{\frac{n}{2}}$, $T_{\frac{n}{2}+1}$, e la loro somma sarà anch'essa $=T_1 + T_n$. Quando poi n è dispari, e però dispari il numero dei termini; allora la serie avrà un solo termine di mezzo, cioè il termine $T_{\frac{n+1}{2}}$, ed essendo esso $=a+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)d$ (n.° 80, n.° I. 85) il suo doppio uguaglierà la somma dei due estremi, onde avremo $T_{\frac{n+1}{2}}=\frac{T_1+T_n}{2}$.

II. In conseguenza dei (n.i 86, *prec.* I) sarà $T_1+T_n=T_2+T_{n-1}=T_3+T_{n-2}=\text{ec.}=T_{\frac{n}{2}}+T_{\frac{n}{2}+1}$, quando n è numero pari, ed $=2T_{\frac{n+1}{2}}$ quando n è numero dispari.

88. *Probl.* 1.° determinare la somma generale di una serie aritmetica.

Sol. Mentre sia data la serie, si moltiplichi la somma degli estremi pel numero dei termini, si divida il prodotto per due, e il quoto, che quindi risulta sarà la somma richiesta. Avremo perciò S (n.° 80) $=\frac{(T_1+T_n)n}{2}=\frac{(2a+(n-1)d)n}{2}$, e posto $a+(n-1)d=u$ avremo $S=\frac{(a+u)n}{2}$.

Difatti pei (I, II. n.° 81) si ha evidentemente $S=(T_1+T_n)+(T_2+T_{n-1})+(T_3+T_{n-2})+$ ec. fino alla somma $\left(T_{\frac{n}{2}}+T_{\frac{n}{2}+1}\right)$, quando n è

pari, ed al solo termine $T_{\frac{n+1}{2}}$ quando n è dispari. Ma nella nostra ipotesi ciascuna delle somme, che abbiamo ora poste tra parentesi è $= T_1 + T_n$, ed il loro numero, quando n è pari uguaglia $\frac{n}{2}$, e quando n è dispari uguaglia $\frac{n-1}{2}$, giacchè ne consideriamo escluso il termine solitario $T_{\frac{n+1}{2}}$; dunque nel caso di n pari risulterà $S = (T_1 + T_n)\frac{n}{2}$, e nel caso di n dispari avremo $S = (T_1 + T_n)\frac{n-1}{2} + T_{\frac{n+1}{2}}$, ma $T_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{2}(T_1 + T_n)$ (I, n.° 37). Dunque tanto quando n è pari, come quando n è dispari si avrà la richiesta somma $S = \frac{(T_1 + T_n)n}{2}$, e però $= \frac{(2a+(n-1)d)n}{2} = \frac{(a+u)n}{2}$, chiamato u l'ultimo termine della serie. Dunque, ec.

Che se venga data non già la serie, ma bensì il termine generale della serie medesima; allora si deduce dal generale il termine primo, e l' ultimo, e poscia si prosegue ad operare come precedentemente.

89. *Scol.* 4.° I. Col mezzo delle due Equazioni

$$u = a + (n-1)d, \quad S = \frac{(a+u)n}{2}. \qquad \text{(VI)}$$

(*n.° prec.*), possono sempre determinarsi due del-

le cinque quantità a, d, u, n, S esprimenti rispettivamente il primo termine, la differenza, il termine ultimo, il numero de' termini, e la somma in una serie aritmetica; mentre di esse cinque quantità vengano date le altre tre. Dunque tutti i Problemi pratici, ne' quali la cognita, o le incognite sono una, o più delle accennate quantità a, d, u, n, S, saranno tali che nella loro soluzione dovrà tenersi conto delle Equazioni (VI).

II. I Problemi perciò *d'interesse semplice*, cioè quei Problemi pratici, ne' quali si considera un Capitale, che produce un frutto annuo, e ne' quali i frutti non danno frutto ulteriore, possono per la massima parte risolversi col mezzo delle indicate Equazioni (VI). Supposto per esempio che un Tale, ricavando da un suo Capitale a un frutto annuo semplice d, lasci per un corso di anni $n-1$ accumulare col Capitale tutti i frutti; se si cerchi, quale sarà dopo l'accennato tempo tutto il suo denaro tra capitale, e frutti; è chiaro, che in tal caso l' incognita sarà l' ultimo termine n, ed avremo $u=a+(n-1)d$. Che se, poste le precedenti condizioni, si voglia sapere dopo quanti anni si sarà accumulato tra Capitale, e frutti un certo valore; allora l' incognita è il numero degli anni

$n-1$, ed avremo $n-1=\frac{u-a}{2}$; e se finalmente vogliasi determinare, quale debba essere il capitale, o quale il frutto, acciocchè dopo un determinato numero di anni $n-1$ risulti nella solita maniera un dato cumulo u; allora essendo a, oppure d l'incognita rispettiva, otterremo per la soluzione del Problema in corrispondenza $a=u-(n-1)d$, oppure

$d=\frac{u-a}{n-1}$. Se poi un' altra persona ritiri nel primo anno un frutto a, e negli altri anni successivi questo frutto si accresca per modo, che il frutto

di

di ciascun anno superi quello dell' anno prossimo precedente di una quantità costante d, allora, se si domanda, quale sarà il cumulo di tutti gli accennati frutti dopo un lasso di anni n, determinerò prima il frutto dell' ultimo anno, che sarà $u = a + (n-1)d$, e poscia il cumulo, che verrà evidentemente somministrato dalla seconda delle Equazioni (VI).

90. *Probl.* 2.° Elevato ciascun termine della serie (V) ad una potenza, il cui esponente sia un determinato numero intero, e positivo, si domanda la somma della serie, che ne risulta.

Sol. Supposto, che la somma $T_1^p + T_2^p + T_3^p + \text{ec.} + T_n^p$ si esprima con la $S^{(p)}$, potendosi dalla p rappresentare un numero qualunque, e supposto, che si denominino A, B, C, D, ec. i coefficienti numerici nello sviluppo del binomio $(T+d)^m$; pel (I. $n.°$ 85) vedesi, che avremo

$$T_2^m = \left(T_1 + d\right)^m = T_1^m + AT_1^{m-1}d + BT_1^{m-2}d^2 + CT_1^{m-3}d^3 + DT_1^{m-4}d^4 + \text{ec.}$$

$$T_3^m = \left(T_2 + d\right)^m = T_2^m + AT_2^{m-1}d + BT_2^{m-2}d^2 + CT_2^{m-3}d^3 + DT_2^{m-4}d^4 + \text{ec.}$$

$$T_4^m = \left(T_3 + d\right)^m = T_3^m + AT_3^{m-1}d + BT_3^{m-2}d^2 + CT_3^{m-3}d^3 + DT_3^{m-4}d^4 + \text{ec.}$$

ec. ec.

$$T^m_{n+1} = \left(T_n + d\right)^m = T^m_n + AT^{m-1}_n d + BT^{m-2}_n d^2$$
$$+ CT^{m-3}_n d^3 + DT^{m-4}_n d^4 + \text{ec.};$$

e per conseguenza, a cagione di $T_1 = a$, e di $T_{n+1} = T_n + d = u+d$ (I. n.° 85, n.° 88), sommando si otterrà

$$(VII)\quad (u+d)^m - a^m = AS^{(m-1)}d + BS^{(m-2)} d^2 + CS^{(m-3)} d^3 + DS^{(m-4)} d^4 + \text{ec.}$$

Si faccia ora m successivamente $= 1, 2, 3, 4$, ec. Risultando perciò dalla Equazione (VII)

$$(u+d) - a = dS^{(0)};$$
$$(u+d)^2 - a^2 = 2dS^{(1)} + d^2S^{(0)};$$
$$(u+d)^3 - a^3 = 3dS^{(2)} + 3d^2S^{(1)} + d^3S^{(0)};$$
$$(u+d)^4 - a^4 = 4dS^{(3)} + 6d^2S^{(2)} + 4d^3S^{(1)} + d^4S^{(0)};$$
ec.

successivamente otterremo

$$S^{(0)} = \frac{(u+d)-a}{d}$$
$$S^{(1)} = \frac{((u+d)^2 - a^2) - d((u+d) - a)}{2d}$$
$$S^{(2)} = \frac{((u+d)^3 - a^3) - 3d((u+d)^2 - a^2) + d^2((u+d) - a)}{3d}$$
$$S^{(3)} = \frac{((u+d)^4 - a^4) - 2d((u+d)^3 - a^3) + d^2((u+d)^2 - a^2)}{4d}$$
ec.

d'onde si vede che, proseguendo, potremo nella stessa maniera determinare la somma $S^{(4)}$ delle po-

tenze quarte, la somma $S^{(5)}$ delle potenze quinte, e così di seguito fine alla somma di quelle potenze, che sono state richieste dal Problema. Sviluppando le successive podestà del binomio $u+d$, e sostituendo, si otterrà con maggior precisione

$$S^{(0)} = \frac{a+(n-1)d+d-a}{d} = n$$

$$S^{(1)} = \frac{u^2+2ud+d^2-a^2-du-d^2+ad}{2d} = \frac{(u+a)n}{2},$$

come nel (*n.*° 83), e così in progresso.

CAPO SECONDO

Delle serie Algebraiche.

91. *Def.* 8. Si dicono *Algebraiche* quelle serie, nelle quali il termine generale T è della forma

$$An^m + Bn^{m-1} + Cn^{m-2} + Dn^{m-3} + \text{ec.} + L, \quad \text{(VII)}$$

essendo l'esponente m un numero intero, e positivo, ed i coefficienti A, B, C, D, ec. indipendenti dal numero de' termini n. Secondo poi la diversità de' valori, che si possono attribuire all' esponente m, simili serie si distinguono in diversi gradi, od ordini. Diconsi perciò serie algebraiche di 1.° *grado*, od *ordine* quelle, nelle quali si ha l'esponente $m=1$; di *grado*, od *ordine* 2.°, quelle, in cui $m=2$; di *grado*, od *ordine* 3.° quelle, ove $m=3$, e così di seguito; onde $An+B$, An^2+Bn+C, An^3+Bn^2+Cn+D, ec. ne saranno i rispettivi termini generali.

92. *Probl.* 3.° Trovare il Termine generale di quella serie, nella quale la somma generale viene espressa per

(VIII) $Mn^p + Nn^{p-1} + Pn^{p-2} + Qn^{p-3} + \text{ec.} + Vn$ espressione, ove p è numero intero, e positivo; ed M, N, P, ec. sono indipendenti da n.

Sol. Poichè pel (II. *n.*° 81) abbiamo $T = S_n - S_{n-1}$, pel (I *n.*° 81) otterremo

$$T = Mn^p + Nn^{p-1} + Pn^{p-2} + Qn^{p-3} + \text{ec.} + Vn - \left(M(n-1)^p + N(n-1)^{p-1} + P(n-1)^{p-2} + Q(n-1)^{p-3} + \text{ec.} + V(n-1)\right).$$

Dunque posto nella somma data (VIII) $n-1$ invece di n, e chiamato $Mn^p + an^{p-1} + bn^{p-2} + cn^{p-3} + \text{ec.} + hn + k$ il risultato, che ne viene, sarà evidentemente

(IX) $T = (N-a)n^{p-1} + (P-b)n^{p-2} + (Q-c)n^{p-3} + \text{ec.} + (V-h)n - k$ il termine generale richiesto.

Mentre i coefficienti M, N, P, Q, ec. della (VIII) siano numerici, potremo agevolmente trovare il precedente termine T, poichè si possono determinare i sopraesposti coefficienti M, a, b, c, ec. k con un metodo pratico perfettamente simile all' indicato nei (*n.*i 252, 206 *Alg.*). Posti difatti in una linea orizzontale i coefficienti M, N, P, Q, ec. V, o, e posto alla loro sinistra e da lor separato con una lineetta verticale il numero -1, operando come nel citato (*n.*° 252 *Alg.*) si porti il primo coefficiente M sotto del secondo N, si moltiplichi esso M per -1, e sommato il prodotto $-M$ col sovrapposto N, si collochi il risultato, che ne viene, sotto del terzo coefficiente P; si moltiplichi tal risultato per -1, si sommi il prodotto col sovrapposto P, e scritto il nuovo risultato, che nasce, sotto del quarto coefficiente Q, si prosegua innanzi nella stessa maniera, finchè si è oltrepassato l'ul-

timo coefficiente o. In seguito si determini una seconda, una terza, una quarta, ec. riga, operando pienamente come nel cit. (*n.*° 206. *Algeb.*), e giunti per simil maniera alla linea $p+1$ *esima*, i numeri, che nel complesso totale formano l' ultima colonna verticale, costituiranno, cominciando dall' estremo, e ascendendo successivamente, gl' indicati coefficienti M, a, b, c, ec. k. Fra poco potremo assegnar la ragione della operazione ora accennata, come pur quella delle operazioni esposte nei cit.[i] (*n.i* 206, 269, *Alg.*). Frattanto gioverà rischiarare il metodo con qualche esempio.

Sia $S = n^4 - 2n^3 + 5n^2 - 7n$. Scritti i suoi coefficienti $1, -2, 5, -7, 0$ in (X) in una linea orizzontale, determino nel modo ora indicato le $4+1=5$ righe successive di numeri; e i numeri $1, -6, 17, -27, 15$ dell' ultima colonna verticale altro non saranno che i coefficienti della funzione, che risulta dal porre nella supposta $n-1$ invece di n, onde tal funzione sarà la $n^4 - 6n^3 + 17n^2 - 27n + 15$. Ma paragonando questa con la precedente generale $Mn^{p} + an^{p-1} + bn^{p-2} +$ ec., e paragonando con la precedente somma (VIII) la data $n^4 - 2n^3 + 5n^2 - 7n$, si ottiene $M=1$; $N=-2$, $P=5$, $V=-7$, $a=-6$, $b=17$, $c=-27$, $k=15$. Dunque risultando $N-a=4$, $P-b=-12$, $V-c=20$, si avrà per la formola (IX) $T=4n^3-12n^2+20n-15$. Difatti col porre successivamente $n=1, 2, 3, 4$, ec. ed operando per maggiore speditezza come nel (*n.*° 252 *Alg.*), si ricava

$$T_1 = -3,\ T_2 = 9,\ T_3 = 45,\ T_4 = 129, \text{ ec.};$$

$$S_1 = -3,\ S_2 = 6,\ S_3 = 51,\ S_4 = 180, \text{ ec.},$$

e vedesi attualmente essere in realtà $T_1 = -3 = S_1$, $T_1 + T_2 = -3 + 9 = 6 = S_2$, $T_1 + T_2 + T_3 = -3 + 9 + 45 = 51 = S_3$, ec.

Se fosse stato $S = 2n^5 - 4n^4 + 3n$; scritti in (X) i coefficienti di questa S, col porre giusta il (*n.*° 252 *Alg.*) tanti zeri in luogo dei coefficienti di quei termini che mancano, opererò come precedentemente, e risulterà in corrispondenza $T = 10n^4 - 36n^3 + 44n^2 - 26n + 9$, come difatti apparisce, ricavandosi da queste funzioni

$$T_1 = 1,\ T_2 = 5,\ T_3 = 165,\ T_4 = 865,\ \text{ec.}$$
$$S_1 = 1,\ S_2 = 6,\ S_3 = 171,\ S_4 = 1036,\ \text{ec.}$$

(X)

−1 | 1,	−2,	5,	−7,	0	−1 | 2,	−4,	0,	0,	3,	0,		
	1,	−3,	8,	−15,	15	2,	−6,	6,	−6,	9,	−9	
		1,	−4,	12,	−27		2,	−8,	14,	−20,	29	
			1,	−5,	17			2,	−10,	24,	−44	
				1,	−6				2,	−12,	36	
					1					2,	−14	
											2	

93. *Scol.* 5.° I. Supposto $p - 1 = m$, osservo, che nella funzione (IX) di numero $m+1$ saranno i coefficienti $N-a$, $P-b$, $Q-c$, ec.$-k$, e che in essi di numero m sono le quantità N, P, Q, ec. V, di numero $m+1$ le a, b, c, d, ec. k; ma quelle altro non sono che i coefficienti della (VIII), toltone il primo M, e queste dipendono pienamente da' coefficienti medesimi, compresovi esso primo M. Dunque potendosi sempre considerare indeterminati gli accennati $m+1$ coefficienti della (VIII), tali potranno porsi sempre eziandio quelli della (IX). Ora i coefficienti della (VII) sono ancor essi di numero $m+1$.

Dunque qualunque siasi il loro valore, potremo sempre determinare i coefficienti della (IX) in modo che essa (IX) divenga identica con la (VII), e così se si supponessero indeterminati i coefficienti A, B, C, ec. di quest' ultima funzione, e non tali quelli della prima, potremo sempre determinare essi A, B, C, ec. in guisa che la (VII) diventi identica con la (IX): ma la (VII) non è che il termine generale di una qualunque serie algebraica (*n.*° 91), dunque, tale essendo ancora la (IX), ne segue, che la (VIII) esprimerà la somma generale di una qualsivoglia di tali serie (*n.*° 92).

II. Quindi si vede che la somma generale di una serie algebraica è anch' essa una funzione di n intera, e razionale, nella quale l' esponente massimo supera di un' unità il massimo esponente del termine generale corrispondente; e perciò la somma generale di una serie algebraica di 1.°. o di 2.°, o di 3.° ec. grado (*n.*° 91) sarà una funzione di n intera, e razionale in corrispondenza di 2.°, di 3.°, di 4.° ec. grado.

94. Problema 4.° Data la funzione (VII) termine generale di una serie algebraica se ne cerca la somma generale.

Sol. Poichè, essendo di grado m la serie data (*n.*° 91), la sua somma generale deve essere una funzione di n intera, e razionale, il cui massimo esponente è $m+1$ (II. *n.*° *prec.*), supporrò che tal somma sia la

$$S = Mn^{m+1} + Nn^{m} + Pn^{m-1} + Qn^{m-2} + Rn^{m-3} + \text{ec.} \qquad \text{(XI)}$$
$$Vn + Y,$$

e non si avrà in essa a far altro, che a determinare i coefficienti M, N, P, Q, ec. Y. Per questo fine colloco in luogo di n la quantità $n-1$, e siccome deve risultare sempre $S_{n} - S_{n-1} = T$ (II. *n.*° 81), ne verrà, qualunque sia il valore di n,

(XII) $T = (Mn^{m+1} + Nn^m + Pn^{m-1} + Qn^{m-2} + Rn^{m-3} +$ ec. $+ Vn) -$

$(M(n-1)^{m+1} + N(n-1)^m + P(n-1)^{m-1} +$

$Q(n-1)^{m-2} + R(n-1)^{m-3} +$ ec. $+ V(n-1)) =$

$An^m + Bn^{m-1} + Cn^{m-2} + Dn^{m-3} +$ ec. $+ L$,

e però, sviluppate le diverse potenze del binomio $n-1$, e paragonati i termini omologhi, otterremo

$(m+1)M = A$, $mN - \frac{(m+1)m}{2}M = B$, $(m-1)P - \frac{m(m-1)}{2}N$

$+ \frac{(m+1)(m)(m-1)}{2\,.\,3}M = C$, $(m-2)Q - \frac{(m-1)(m-2)}{2}P$

$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}N - \frac{(m+1)(m)(m-1)(m-2)}{2\,.\,3\,.\,4}M = D$, ec.

Equazioni, le quali sono di numero $m+1$, e tutti ci somministrano i valori dei primi $m+1$ coefficienti della (XI); li determino adunque, li sostituisco in essa (XI), e non rimanendo più a determinarsi, che l' ultimo coefficiente Y, osservo, che, posto tanto nella (XI), come nella (XII) $n = 1$ si ottiene $S_1 = M+N+P+$ec.$+V+Y$, $T_1 = M+N+P+$ec.$+V$, ma pel (I. n.° 81) dev' essere $S_1 = T_1$. Dunque risultando $M+N+P+$ ec. $+V+Y = M+N+P+$ ec. $+V$, ne verrà $Y = 0$, e però la somma generale richiesta sarà sempre mancante del termine privo di n, come difatti si suppose nella (VIII) (n.° 92).

Cercando attualmente i valori de' coefficienti M, N, P, ec., poichè si ottiene

$$M = \frac{A}{m+1}$$

$$N = \frac{m+1}{2} M + \frac{B}{m},$$

$$P = \frac{m}{2}(N - \frac{m+1}{3} M) + \frac{C}{m-1}, \qquad \text{(XIII)}$$

$$Q = \frac{m-1}{2}(P - \frac{m}{3}(N - \frac{m+1}{4} M)) + \frac{D}{m-2},$$

$$R = \frac{m-2}{2}(Q - \frac{m-1}{3}) \text{ C} P - \frac{m}{4}(N - \frac{m+1}{5} M))) + \frac{E}{m-3},$$

$$U = \frac{m-3}{2}(P - \frac{m-2}{3}(Q - \frac{m-1}{4}(P - \frac{m}{5}(N - \frac{m+1}{6} M)))) + \frac{F}{m-4}$$

ec.

veggo essere questi valori dotati d' un certo andamento costante facile a riconoscersi, per cui gl' indicati coefficienti si possono non difficilmente determinare nella seguente maniera.

Si scrivano primieramente in (XIV) in una linea orizzontale tutti i coefficienti del dato termine generale (VII) divisi rispettivamente pei numeri $m+1$, m, $m-1$, $m-2$, ec.; posto quindi in una seconda riga $\frac{A}{m+1} = M$, si scrivano di seguito le quantità $\frac{(m+1)M}{2}$, $\frac{(m+1)M}{3}$, $\frac{(m+1)M}{4}$, $\frac{(m+1)M}{5}$, $\frac{(m+1)M}{6}$, ec., e sommata la prima di queste col sovrapposto coefficiente $\frac{B}{m}$, si ponga in una terza riga $\frac{(m+1)M}{2} + \frac{B}{m} = N$. Dal valore così truovato di N sottraggansi successivamente le quantità della seconda riga $\frac{(m+1)M}{3}$, $\frac{(m+1)M}{4}$, $\frac{(m+1)M}{5}$, $\frac{(m+1)M}{6}$, ec.,

si scrivano di seguito al valore di N i valori, che ne risultano, e che per brevità denomino N', N'', N''', N^{iv}, ec. : moltiplicati questi tutti per m, e divisi rispettivamente per 2, 3, 4, 5, ec., si collochino in una quarta riga i risultati
$\frac{mN'}{2}$, $\frac{mN''}{3}$, $\frac{mN'''}{4}$, $\frac{mN^{iv}}{5}$, ec. Ciò fatto si sommi $\frac{mN'}{2}$ col sovrapposto $\frac{C}{m-1}$: ottenendosi da ciò $\frac{mN'}{2}+\frac{C}{m-1}=P$, si ponga tale Equazione in una linea quinta, e presso di lei si pongano i risultati, che nascono sottraendo successivamente da questo P le precedenti quantità $\frac{mN''}{3}$, $\frac{mN'''}{4}$, $\frac{mN^{iv}}{5}$, ec., e che per brevità chiamo P', P'', P''', ec., si collochino in seguito in una sesta riga le quantità, che si producono moltiplicando ciascuna delle P', P'', P''', ec. per $m-1$, e dividendole rispettivamente per 2, 3, 4, ec.; e unita la prima di esse col sovrapposto $\frac{D}{m-2}$, si ponga in una settima riga l'Equazione $\frac{(m-1)P'}{2}+\frac{D}{m-2}=Q$, e appresso i valori, che si hanno col sottrarre da Q i valori $\frac{(m-1)P''}{3}$, $\frac{(m-1)P'''}{4}$ ec., e che denomino Q', Q'', ec. Si moltiplichino poscia questi Q', Q'', ec. per $m-2$, si dividano rispettivamente per 2, 3, ec. e scritti in una riga ottava i risultati $\frac{(m-2)Q'}{2}$, $\frac{(m-2)Q''}{3}$, ec. e sommato col primo di essi il sovrapposto $\frac{E}{m-3}$, si scriva in una riga nona $\frac{(m-2)Q'}{2}+$

$\frac{E}{m-3} = R$; e si prosegua avanti sempre con la stessa regola, finchè si siano esauriti i coefficienti posti nella prima linea; e così operando, apparisce dall'andamento dei valori (XIII), che tutti si ottengono i chiesti valori dei coefficienti M, N, P, ec.

$$\text{(XIV)}\quad \begin{array}{llllll}
\frac{A}{m+1}, & \frac{B}{m}, & \frac{C}{m-1}, & \frac{D}{m-2}, & \frac{E}{m-3}, & \frac{F}{m-4}, \\
\frac{A}{m+1}=M, & \frac{(m+1)M}{2}, & \frac{(m+1)M}{3}, & \frac{(m+1)M}{4}, & \frac{(m+1)M}{5}, & \frac{(m+1)M}{6}, \\
 & \frac{(m+1)M}{2}+\frac{B}{m}=N, & N', & N'', & N''', & N^{iv}, \\
 & & \frac{mN'}{2}, & \frac{mN''}{3}, & \frac{mN'''}{4}, & \frac{mN^{iv}}{5}, \\
 & & \frac{mN'}{2}+\frac{C}{m-1}=P, & P', & P'', & P''', \\
 & & & \frac{(m-1)P'}{2}, & \frac{(m-1)P''}{3}, & \frac{(m-1)P'''}{4}, \\
 & & & \frac{(m-1)P'}{2}+\frac{D}{m-2}=Q, & Q', & Q'', \\
 & & & & \frac{(m-2)Q'}{2}, & \frac{(m-2)Q''}{3}, \\
 & & & & \frac{(m-2)Q'}{2}+\frac{E}{m-3}=R, & R', \\
 & & & & & \frac{(m-3)R'}{2}, \\
 & & & & & \frac{(m-3)R'}{2}+\frac{F}{m-4}=U, \\
 & & & & & \text{ec.}
\end{array}$$

Sia per esempio $T = 4n^5 - 7n^4 + 2n^3 - 10n^2 + 5n - 9$; effettuo quì sotto nel modo ora accennato l'esposto calcolo, e risultandoci, come si vede, $M = \frac{2}{3}$, $N = \frac{3}{5}$, $P = -\frac{4}{3}$, $Q = -\frac{14}{3}$, $R =$

$-\frac{}{3}$, $U = -\frac{119}{15}$ si avrà in corrispondenza

$$S = \frac{2}{3}n^6 + \frac{3}{5}n^5 - \frac{4}{3}n^4 - \frac{14}{3}n^3 - \frac{7}{3}n^2 - \frac{119n}{15} =$$

$$\frac{1}{15}(10n^6 + 9n^5 - 20n^4 - 70n^3 - 35n^2 - 119n)$$

$$\frac{4}{6},\quad -\frac{7}{5},\quad \frac{2}{4},\quad -\frac{10}{3},\quad \frac{5}{2};\quad -\frac{9}{1},$$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = M,\ \frac{4}{2},\quad \frac{4}{3};\quad \frac{4}{4},\quad \frac{4}{5},\quad -\frac{4}{6},$$

$$\frac{4}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{5} = N,\quad -\frac{11}{15},\quad -\frac{8}{20},\quad -\frac{5}{25},\quad -\frac{2}{30},$$

$$-\frac{11}{6};\quad -\frac{8}{12},\quad -\frac{5}{20},\quad -\frac{2}{30},$$

$$-\frac{11}{6} + \frac{2}{4} = -\frac{4}{3}, = P,\ -\frac{24}{36};\quad -\frac{65}{60},\quad -\frac{114}{90},$$

$$-\frac{12}{9},\quad -\frac{65}{45};\quad -\frac{114}{90},$$

$$-\frac{12}{9} - \frac{10}{3} = -\frac{14}{3} = Q,\ -\frac{145}{45},\quad -\frac{306}{90},$$

$$-\frac{145}{30},\quad -\frac{306}{90},$$

$$-\frac{145}{30} + \frac{5}{2} = -\frac{7}{3} = R,\quad \frac{96}{90},$$

$$\frac{96}{90} - \frac{9}{1} = -\frac{119}{15} = U.$$

95. *Probl.* 5.° Dati $m+1$ termini d'una serie algebraica di grado m truovarne il termine generale.

Sol. Siano $T_{n'}$, $T_{n''}$, $T_{n'''}$, ec. $T_{n^{(m+1)}}$ i termini dati, ove sono cogniti eziandio i numeri n', n'', n''', ec. $n^{(m+1)}$. Supposto essere (VII) (n.° 91) il termine general domandato, ove considero incogniti i coefficienti A, B, C, ec., si sostituiscano in esso successivamente in luogo della n i numeri n', n'', n''' ec. $n^{(m+1)}$; ne verran le Equazioni

$$An'^{m} + Bn'^{m-1} + Cn'^{m-2} + Dn'^{m-3} + \text{ec.} + L = T_{n'}$$

$$An''^{m} + Bn''^{m-1} + Cn''^{m-2} + Dn''^{m-3} + \text{ec.} + L = T_{n''}$$

$$An'''^{m} + Bn'''^{m-1} + Cn'''^{m-2} + Dn'''^{m-3} + \text{ec.} + L = T_{n'''}$$

ec.

le quali saranno evidentemente di numero $m+1$; ma di numero $m+1$ sono ancora i coefficienti A, B, C, D, ec. L. Dunque tante essendo le Equazioni, quante le incognite, potrò col mezzo di quelle determinar queste, e conosciuti così i coefficienti A, B, C, ec. della funzione (VII), determinare la funzione medesima, ed ottenere quindi il domandato termine generale. (XV)

Sia per esempio $m=3, n'=1, n''=2, n'''=3, n^{iv}=4, T_{n'}=-1, T_{n''}=-8, T_{n'''}=-1, T_{n^{iv}}=32$.

Avendosi da ciò le Equazioni
$A+B+C+D=-1$, $8A+4B+2C+D=-8$, $27A+9B+3C+D=-1$, $64A+16B+4C+D=32$, con le successive sottrazioni si otterranno le altre $7A+3B+C=-7$, $19A+5B+C=7$, $37A+7B+C=33$, quindi le $12A+2B=14$, $18A+2B=26$, e finalmente la $6A=12$, donde avendosi $A=2$ col retrocedere truoveremo $B=-5$, $C=-6$, $D=8$, e però $T=2n^3-5n^2-6n+8$.

Se il numero dei termini dati fosse $< m+1$, allora è chiaro, che il Problema sarebbe indeterminato, e sarebbe più che determinato, se l'esposto numero de' termini fosse $> m+1$..

96. *Teor.* 2.° Nelle serie algebraiche del grado m la differenza *mesima* (*n.*° 82) è sempre una quantità priva della lettera n, e quindi è di valore costante.

Dim. Sia (VII) (*n.*° 91) il termine generale della serie data; pel (*n.*° 82) si avrà $D=T_{n+1}-T_n$

$= A((n+1)^m - n^m) + B((n+1)^{m-1} - n^{m-1})$ $+ C((n+1)^{m-2} - n^{m-2}) +$ ec. $+ ((n+1) - n)$. Dunque effettuate attualmente le elevazioni del binomio $n+1$ alle indicate potenze m, $m-1$, $m-2$, ec., effettuate in seguito le opportune sottrazioni, e riduzioni, e chiamati finalmente per brevità a, b, c, ec. i successivi coefficienti delle varie potenze della n, risulterà evidentemente $D = an^{m-1} + bn^{m-2} + cn^{m-3}$ $+$ ec., e per conseguenza la differenza prima corrispondente al termine generale T_n di una data serie algebraica del grado m, non è essa pure che il termine generale di un' altra serie algebraica del grado $m-1$. Ora quale è D rapporto a T_n, tale è $D^{(2)}$ rapporto a D ($n.^o$ 82): dunque denominati a', b', c', ec. i coefficienti delle diverse podestà della n nel valore di $D^{(2)}$, si avrà $D^{(2)}$ $= a'n^{m-2} + b'n^{m-3} + c'n^{m-4}$ $+$ ec. . Per la stessa ragione, denominati rispettivamente a'', b'', c'', ec.; a''', b''', c''', ec.; a^{iv}, b^{iv}, c^{iv}, ec.; ec. i coefficienti delle varie potenze della n nelle successive differenze $D^{(3)}$, $D^{(4)}$, $D^{(5)}$, ec., vedesi dover essere $D^{(3)} = a''n^{m-3} + b''n^{m-4} + c''n^{m-5}$ $+$ ec., $D^{(4)} =$ $a'''n^{m-4} + b'''n^{m-5} + c'''n^{m-6}$ $+$ ec., $D^{(5)} = a^{\text{iv}}n^{m-5}$ $+ b^{\text{iv}}n^{m-6} + c^{\text{iv}}n^{m-7}$ $+$ ec, ec. Dunque essendo m numero intero, e positivo ($n.^o$ 91), dovrà finalmente risultare $D^{(m)} = a^{(m-1)} n^{m-m} = a^{(m-1)}$; ma $D^{(m)}$ è la differenza *mesima* di T_n , $a^{(m-1)}$ è una

quantità priva affatto della n, e però di valore costante, poichè la variabilità dei successivi termini procede dalla variazione della n. Dunque, ec.

Sia per esempio in (XV) la serie (A) il cui termine generale è $n^4 - 5n^3 + 6n^2 - 10n - 8$. Truovate in (B) le differenze prime, in (C) le seconde, in (D) le terze, ed in (E) le quarte, vedesi essere quest' ultime tutte eguali fra loro, come diffatti deve, per quanto si è dimostrato, accadere, essendo la supposta serie di 4.° grado.

(XV)

(A)	-16,	-28,	-38,	-16,	92,	364,	902,	1832,	ec.
		-16,	-28,	-38,	-16,	92,	364,	902,	ec.
(B)		-12,	-10,	22,	10[illegible],	272,	538,	930,	ec.
			-12,	-10,	22,	108,	272,	538,	ec.
(C)			2,	32,	86,	164,	266,	392,	ec.
				2,	32,	86,	164,	266,	ec.
(D)				30,	54,	78,	102,	126,	ec.
					30,	54,	78,	102,	ec.
(E)					24,	24,	24,	24,	ec.

97. *Scol.* 7. I. Da quanto si è detto nel (*n.° prec.*) apparisce, dover essere $D^{(m+1)} = 0$, $D^{(m)} = a^{(m-1)}$, $D^{(m-1)} = a^{(m-2)} n + b^{(m-2)}$, $D^{(m-2)} = a^{(m-3)} n^2 + b^{(m-3)} n + c^{(m-3)}$, $D^{(m-3)} = a^{(m-4)} n^3 + b^{(m-4)} n^2 + c^{(m-4)} n + d^{m-4}$, e in generale, $D^{(m-p)} = a^{(m-p-1)} n^p + b^{(m-p-1)} n^{p-1} + c^{(m-p-1)} n^{p-2} + d^{(m-p-1)} n^{p-3} +$ ec. $+ k^{(m-p-1)}$.

II. Conosciuti in (XV) i primi termini -16, -12, 2, 30, 24 delle linee (A), (B), (C), (D), (E), potremo prolungare la serie (A) quanto si vuole, senza avere ricorso al corrispondente termine ge-

nerale. Scritta difatti in (XVI) in una linea orizzontale (E) la differenza ultima 24, e ripetuta quante volte si vuole, si ponga in una seconda riga (D) sotto del primo 24. la differenza penultima 30, si sommi questa col sovrapposto 24 e il risultato 54. si collochi in linea nella seconda colonna, così si ponga nella terza colonna il numero 78, che risulta dal sommare il precedente 54. col sovrapposto 24. ; e per tal guisa si prolunghi quanto si vuole la seconda riga (D). In seguito si scriva nella prima colonna sotto del 30 in (C) l' antepenultima delle differenze date, cioè il 2, e sommato questo col sovrapposto 30 si collochi in linea sotto del 54. il risultato 32, nella terza colonna sotto del 78 pongasi il numero 86., che si ottiene dalla somma del precedente 32 col sovrapposto 54; e così si prosegua, e si prolunghi a piacimento la terza linea (C). Scritta in egual maniera nella terza colonna, e nella quarta riga (B) quella tra le differenze date, che precede l'antepenultima, cioè il numero — 12, pongasi presso di lui il — 10, che risulta dal sommare esso — 12 col sovrapposto 2; e così presso del — 10, e sotto dello 86 si ponga il 22, che si ottiene dall' unire col sovrapposto 32 il precedente — 10, e per simile modo si formi, e si protragga, quanto piace la linea (B). Finalmente posto nella prima colonna, e nella riga (A) il primo numero dato — 16; si scrivano appresso in linea i numeri — 28, — 38, ec. che risultano in corrispondenza dal sommare il — 16 col sovrapposto — 12, il — 28 col sovrapposto — 10, e così in progresso, prolungando essa linea (A) quanto si vuole. Ciò fatto dal semplice confronto de' modi con i quali sonosi ricavati i numeri (XV), e gli altri (XVI), apparisce, che questi altro non deggiono essere, che quelli ottenuti inversamente, cioè in guisa, che mentre in (XV) dai termini (A) della serie si passa alle differenze prime (B), posscia

scia alle seconde (C), ec. fino alle costanti (E); in (XVI) al contrario dalle costanti (E) si passa alle differenze penultime (D), poscia alle antepenultime (C), e così di seguito fino ai termini della serie (A), la quale vedesi, che si ottiene, e si può protrarre quanto piace indipendentemente dal termine generale. Quanto si è detto, e praticato in questa serie algebraica apparisce potersi dire egualmente, e praticare in tutte le altre.

(E)	24,	24,	24,	24,	24,	ec.				
(D)	30,	54,	78,	102,	126,	150,	ec.			
(C)	2,	32,	86,	164,	266,	392,	542,	ec.		
(B)	— 12,	— 10,	22,	108,	272,	538,	930,	1472,	ec.	
(A)	— 16,	— 28,	— 38,	— 16,	92,	364,	902,	1832,	3304,	ec.

98. *Probl.* 6.° Dato il termine generale (VII) di una serie algebraica, determinare l'espressione generale della sua differenza *mesima*, quella delle sue differenze $m-1$ *esime*, l'altra delle differenze $m-2$ *esime*, ec.

Sol. I. Cominciam dal supporre; che nella (VII) esista solamente il primo termine, e sia perciò $T = An^m$. In questa ipotesi, poichè risulta $T_n = An^m$, $T_{n+1} = A(n+1)^m$, $T_{n+2} = A(n+2)^m$, ec. $T_{n+p} = A(n+p)^m$, col sostituire questi valori nella serie (IV), con lo sviluppare le potenze $(n+1)^m$, $(n+2)^m$, ec., e col ridurre otterremo

$$D^{(p)} = \pm A \left(Pn^m - mP'n^{m-1} - \frac{m(m-1)}{2} P''n^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} P'''n^{m-3} - \text{ec.} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} P^{(m-3)} n^3 \right. \quad \text{(XVII)}$$

$$- \frac{m(m-1)}{2} \mathrm{P}^{(m-2)} n^2 - m\mathrm{P}^{(m-1)} n - \mathrm{P}^{(m)} \Big),$$

supposto avendosi

$$\mathrm{P} = 1 - p + \frac{p(p-1)}{2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} + \text{ec.} \mp p \pm 1$$

$$\mathrm{P}' = p \times 1 - \frac{p(p-1)}{2} \times 2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} \times 3 - \text{ec.} \pm p(p-1) \mp 1 \times p,$$

$$\mathrm{P}'' = p \times 1^2 - \frac{p(p-1)}{2} \times 2^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} \times 3^2 - \text{ec.} \pm p(p-1)^2 \mp 1 \times p^2,$$

$$\mathrm{P}''' = p \times 1^3 - \frac{p(p-1)}{2} \times 2^3 + \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} \times 3^3 - \text{ec.} \pm p(p-1)^3 \mp 1 \times p^3,$$

(XVIII) ec.

$$\mathrm{P}^{(m-3)} = p \times 1^{m-3} - \frac{p(p-1)}{2} \times 2^{m-3} + \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} \times 3^{m-3} - \text{ec.}$$
$$\pm p(p-1)^{m-3} \mp 1 \times p^{m-3},$$

$$\mathrm{P}^{(m-2)} = p \times 1^{m-2} - \frac{p(p-1)}{2} \times 2^{m-2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} \times 3^{m-2} - \text{ec.}$$
$$\pm p(p-1)^{m-2} \mp 1 \times p^{m-2},$$

$$\mathrm{P}^{(m-1)} = p \times 1^{m-1} - \frac{p(p-1)}{2} \times 2^{m-1} + \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} \times 3^{m-1} - \text{ec.}$$
$$\pm p(p-1)^{m-1} \mp 1 \times p^{m-1},$$

$$\mathrm{P}^{(m)} = p \times 1^{m} - \frac{p(p-1)}{2} \times 2^{m} + \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} \times 3^{m} - \text{ec.}$$
$$\pm p(p-1)^{m} \mp 1 \times p^{m}, \text{ ec.},$$

e prendendo i segni superiori, quando p è pari, gl'inferiori, quando p è dispari. Si denominino $\mathrm{P}_{(m)}$, $\mathrm{P}'_{(m)}$, ec.; $\mathrm{P}_{(m-1)}$, $\mathrm{P}'_{(m-1)}$, ec.; $\mathrm{P}_{(m-2)}$,

$P'_{(m-2)}$ ec.; ec. ciocchè divengono le quantità (XVIII), quando si fa rispettivamente $p=m$, $m-1$, $m-2$, ec., e sia in primo luogo $p=m$. In questa ipotesi la (XVII) diventerà

$$D^{(m)}=\pm A\left(P'_{(m)}\,n^{m}-mP'_{(m)}\,n^{m-1}-\text{ec.}-mP^{(m-1)}_{(m)}\,n-P^{(m)}_{(m)}\right) \quad \text{(XIX)}$$

; ma nel valore della $D^{(m)}$ non deve esistere la n (n.° 96). Dunque dovendo nella (XIX) svanire tutti i termini, che contengono la n, e ciò qualunque siasi il suo valore, pei (n.i 201, 202. *Alg.*) dovrà essere $P_{(m)}=0$, $P'_{(m)}=0$, $P''_{(m)}=0$, ec. $P^{(m-3)}_{(m)}=0$, $P^{(m-2)}_{(m)}=0$, $P^{(m-1)}_{(m)}=0$, e rimarrà $D^{(m)}=\pm AP^{(m)}_{(m)}$, ossia

$$D^{(m)}=\mp A\left(m\times 1^{m}-\frac{m(m-1)}{2}\times 2^{m}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\times 3^{m}-\text{ec.}\pm m(m-1)^{m}\mp 1\times m^{m}\right),$$

non essendo $P^{(m)}_{(m)}=0$.

II. Riflettasi quivi, che il discorso fatto presentemente è vero, qualunque sia l'intero positivo m, non essendosi a questo m attribuito alcun valore determinato. Dunque posti in luogo di m i numeri $m-1$, $m-2$, $m-3$, ec., dovrà in corrispondenza essere ancora

$$P_{(m-1)}=0,\ P'_{(m-1)}=0,\ P''_{(m-1)}=0,\ \text{ec.}\ P^{(m-2)}_{(m-1)}=0;$$

$$P_{(m-2)}=0,\ P'_{(m-2)}=0,\ P''_{(m-2)}=0,\ \text{ec.}\ P^{(m-3)}_{(m-2)}=0;$$

$\mathrm{P}_{(m-3)} = 0$, $\mathrm{P}'_{(m-3)} = 0$, ec., $\mathrm{P}^{(m-4)}_{(m-3)} = 0$;

e così di seguito, onde in generale sarà $\mathrm{P}^{(m-q)}_{(m-(q-r))} = 0$, ove q, ed r sono due numeri interi, e tali, che q non $> m$, ed $r > 0$. Perchè poi, a cagione di $\mathrm{D}^{(m)}$ = quantità costante (*n.*° 95) dev' essere $\mathrm{D}^{(m+1)} = 0$, $\mathrm{D}^{(m+2)} = 0$, ec. è facile a vedersi che sarà ancora $\mathrm{P}^{(m+q)}_{(m+q+r)} = 0$, onde qualunque sia il valore della q positivo, negativo, o zero, sempre è vero, che $\mathrm{P}^{(m-q)}_{(m-(q-r))} = 0$.

Si faccia in secondo luogo $p = m-1$; per quanto si è ora detto, dalla (XVII) ritrarremo

$$\mathrm{D}^{(m-1)} = \mp \mathrm{A}\left(m\mathrm{P}^{(m-1)}_{(m-1)}\, n + \mathrm{P}^{(m)}_{(m-1)} \right).$$

Così ponendo in seguito, e successivamente $p = m-2$, $m-3$, ec., ne verrà in corrispondenza

$$\mathrm{D}^{(m-2)} = \mp \mathrm{A}\left(\frac{m(m-1)}{2}\, \mathrm{P}^{(m-2)}_{(m-2)}\, n^2 + m\mathrm{P}^{(m-1)}_{(m-2)}\, n + \mathrm{P}^{(m)}_{(m-2)} \right)$$

$$\mathrm{D}^{(m-3)} = \mp \mathrm{A}\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\mathrm{P}^{(m-3)}_{(m-3)}\, n^3 + \frac{m(m-1)}{2}\, \mathrm{P}^{(m-2)}_{(m-3)}\, n^2 \right.$$

$$\left. + m\mathrm{P}^{(m-1)}_{(m-3)}\, n + \mathrm{P}^{(m)}_{(m-3)} \right),$$

ec.

Sia per esempio $\mathrm{T}_n = n^3$. Applicato a questo caso particolare il calcolo ora esposto in generale, poi-

chè a cagione di $m-3$ si ha, $\overset{(3)}{P}_{(3)}=3.1^3-3.2^3+3^3=6$, $\overset{(2)}{P}_{(2)}=2.1^2-2^2=-2$, $\overset{(3)}{P}_{(2)}=2.1^3-2^3=-6$, $\overset{(1)}{P}_{(1)}=1.1=1$, $\overset{(2)}{P}_{(1)}=1.1^2=1$, $\overset{(3)}{P}_{(2)}=1.1^3=1$, si troverà risultare

$\overset{(3)}{D}=6$, $\overset{(2)}{D}=6n+6$, $\overset{(1)}{D}=3n^2+3n+1$.

III. Consideriamo il dato termine generale (VII) in tutta la sua estensione. Poichè quanto si è detto nei (*prec.*i I, II) relativamente alle differenze, che riguardano il termine An^{m}, si dice in egual modo rapporto alle differenze di ciascuno degli altri termini Bn^{m-1}, Cn^{m-2}, Dn^{m-3}, ec., e poichè la differenza della somma di più termini uguaglia evidentemente la somma delle differenze dello stesso grado de' termini medesimi, ne segue, che dovrà essere

$$\begin{aligned}\overset{(p)}{D} =\pm A\Big(& Pn^{m} - mP'n^{m-1} - \frac{m(m-1)}{2}P''n^{m-2} - \\ & \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}P'''n^{m-3} - \text{ec.} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}P^{(m-3)}{}_{n^3}n^3 \\ & - \frac{m(m-1)}{2}P^{(m-2)}n^2 - mP^{(m-1)}n - P^{(m)}\Big) \\ \pm B\Big(& Pn^{m-1} - (m-1)P'n^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2}P''n^{m-3} - \text{ec.} \quad \text{(XX)} \\ & - \frac{(m-1)(m-2)}{2}P^{(m-3)}n^2 - (m-1)P^{(m-2)}n - P^{(m-1)}\Big) \\ \pm C\Big(& Pn^{m-2} - (m-2)P'n^{m-3} - \text{ec.} - (m-2)P^{(m-3)}n - P^{(m-2)}\Big) \\ \pm D\Big(& Pn^{m-3} - \text{ec.} - P^{(n-3)}\Big) \\ & \text{ec.}\end{aligned}$$

e facendo successivamente $p=m$, $m-1$, $m-2$, $m-3$, ec., $m-q$, pel (*prec.* I.) risulterà

$$D^{(m)}=\mp AP^{(m)}_{(m)},$$

$$D^{(m-1)}=\mp\left(mAP^{(m-1)}_{(m-1)}n+AP^{(m)}_{(m-1)}+BP^{(m-1)}_{(m-1)}\right),$$

$$D^{(m-2)}=\mp\left(\frac{m(m-1)}{2}AP^{(m-2)}_{(m-2)}n^2+\left(mAP^{(m-1)}_{(m-2)}+(m-1)BP^{(m-2)}_{(m-2)}\right)n+AP^{(m)}_{(m-2)}+BP^{(m-1)}_{(m-2)}+CP^{(m-2)}_{(m-2)}\right),$$

(XXI)
$$D^{(m-3)}=\mp\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}AP^{(m-3)}_{(m-3)}n^3+\left(\frac{m(m-1)}{2}AP^{(m-2)}_{(m-3)}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}BP^{(m-3)}_{(m-3)}\right)n^2+\left(mAP^{(m-1)}_{(m-3)}+(m-1)BP^{(m-2)}_{(m-3)}+(m-2)CP^{(m-3)}_{(m-3)}\right)n+AP^{(m)}_{(m-3)}+BP^{(m-1)}_{(m-3)}+CP^{(m-1)}_{(m-3)}+DP^{(m-3)}_{(m-3)}\right),$$

ec.

$$D^{(m-q)}=\mp\left(\frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{2.3\ldots q}AP^{(m-q)}_{(m-q)}n^q+\left(\frac{m(m-1)\ldots(m-q+2)}{2.3..(q-1)}AP^{(m-q+1)}_{(m-q)}+\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-q+1)}{2.3\ldots(q-1)}\times BP^{(m-q)}_{(m-q)}\right)n^{q-1}+\left(\frac{m(m-1)\ldots(m-q+3)}{2.3\ldots(q-2)}AP^{(m-q+2)}_{(m-q)}+\right.\right.$$

$$\underline{(m-1)(m-2)\ldots(m-q+2)}\,BP^{(m-q+1)}_{(m-q)} + \frac{(m-2)(m-3\ldots(m-q+1)}{2.3\ldots(q-2)}$$

$$\times\ CP^{(m-q)}_{(m-q)}\Big)\, n^{q-2} + \text{ ec.}$$

$$\Big(mAP^{(m-1)}_{(m-q)} + (m-1)BP^{(m-2)}_{(m-q)} + (m-2)\,P^{(m-3)}_{(m-q)} + \text{ec.} +$$

$$(m-q+1)GP^{(m-q)}_{(m-q)}\Big)\, n + \Big(\, AP^{(m)}_{(m-q)} + BP^{(m-1)}_{(m-q)} +$$

$CP^{(m-2)}_{(m-q)} + \text{ec. } IP^{(m-q)}_{(m-q)}\Big)$. Supposto per esempio $T_n = n^5 - 3n^4 + 5n^3 - 7n^2 + 10$, si truoverà con l'accennato calcolo risultare $D^{(5)} = 120$, $D^{(4)} = 120n + 168$, $D^{(3)} = 60n^2 + 108n + 72$, $D^{(2)} = 20n^3 + 24n^2 + 28n + 4$, $D^{(1)} = 5n^4 - 2n^3 + 7n^2 - 6n - 4$.

99. *Scol.* 7.° I. Avendosi $P = (1-1)^p$; purchè sia $p > 0$, avremo sempre $P = 0$.

II. Il Problema del (*n.*° 98) potrà nei casi particolari risolversi col metodo adoperato nella soluzione del Problema del (*n.*° 95). Volendosi difatti l'espressione generale delle differenze, per esempio seconde, nella serie (A. XV) supposta ad esempio nel (*n.*° 96), comincio dall'osservare, che siccome la serie è di grado quarto, l'espression domandata dovrà essere di secondo: formata quindi l'espressione $Mn^2 + Nn + P$, pongo successivamente $n = 1$, 2, 3, ed essendo 2, 32, 86, le corrispondenti differenze seconde (C. XV), che suppongo di avere già ritruovate con le successive sottrazioni, for-

mo, operando come nel ($n.^{\circ}$ 95), le tre Equazioni $M+N+P=2$, $4M+2N+P=32$, $9M+3N+P=86$, ed avremo da ciò $12n^2-6n-4$ per la chiesta espressione.

100. *Probl.* 7.° Data l' esprèssione generale delle differenze *pesime* in una serie algebraica del grado m, determinare il termine generale della serie medesima.

Sol. I. Sia $p=m$. Dovendo in questo caso la corrispondente differenza $\overset{(m)}{D}$ essere indipendente da n ($n.^{\circ}$ 96), sia a il suo valor dato; avremo da ciò $\overset{(m)}{D}=a$; ma supposto rappresentarsi dalla funzione (VII) il termine general, che si cerca, qualunque essa sia deve sempre risultare $\overset{(m)}{D}=\mp AP^{(m)}_{(m)}$ (XXI. $n.^{\circ}$ 98), ove per le (XVIII) la $P^{(m)}_{(m)}$ è quantità cognita, ed ove si deve prendere il segno superiore, quando m è pari, l' inferiore quando m è dispari. Dunque avendosi $\mp AP^{(m)}_{(m)}=a$, e però $A=\frac{\mp a}{P^{(m)}_{(m)}}$, sarà questo $\frac{\mp a}{P^{(m)}_{(m)}}$ il coefficiente del primo termine generale, ma qualunque siansi i coefficienti degli altri termini Bn^{m-1}, Cn^{m-2}, ec., essi, scomparendo sempre nella differenza *mesima*, lasciano che il valore di tal differenza sia sempre la stessa a; dunque nel termine general che si chiede, potendosi a questi B, C, ec. attribuire un qualsivoglia valore ad arbitrio, e soddisfacendosi sempre alla condizion, che si abbia $\overset{(m)}{D}=a$; ne segue, che infiniti termini generali

corrispondenti ad infinite serie di grado m hanno la medesima differenza $m$esima; e che tutti questi termini vengono compresi nella formola

$$\mp \frac{a}{P_{(m)}^{(m)}} n^m + Bn^{m-1} + Cn^{m-2} + \text{ec.} + L,$$ ove i coefficienti B, C, ec. L possono acquistare un valore qualunque.

Sia per esempio $a = 42$, $m = 3$, onde $P_{(m)}^{(m)} = 3.1^3 - 3.2^3 + 3^3 = 6$; risultando da ciò $A = \frac{+a}{P_{(m)}^{(m)}} = \frac{42}{6} = 7$, ne segue, che la formola dei termini generali in tutte le serie algebraiche di terzo grado, nelle quali la differenza terza sia 42, è $7n^3 + Bn^2 + Cn + D$.

II. Abbiasi $p = m - 1$, e per conseguenza $D^{(m-1)} = an + b$ (I. $n.°$ 97), ove a, b, si pongono quantità note, sia la espressione generale proposta delle differenze $m-1$esime. Supposto ancora in questo caso, che la (VII) rappresenti il termine generale richiesto, per le Equazioni (XXI. $n.°$ 98), dovrà essere

$$\mp \left(mAP_{(m-1)}^{(m-1)} n + AP_{(m-1)}^{(m)} + BP_{(m-1)}^{(m-1)} \right) = an + b,$$ e

però $\pm mAP_{(m-1)}^{(m-1)} = a$, $\mp \left(AP_{(m-1)}^{(m)} + BP_{(m-1)}^{(m-1)} \right) = b$, prendendosi il segno $-$ quando $m - 1$ è pari, ed il segno $+$, quando $m - 1$ è dispari. Ora da que-

ste due Equazioni si ricava $A = \dfrac{\mp a}{mP^{(m-1)}_{(m-1)}}$, $B = \mp$

$$\left(\frac{mbP^{(m-1)}_{(m-1)} - aP^{(m)}_{(m-1)}}{mP^{(m-1)^2}_{(m-1)}}\right). \text{ Dunque } \mp \frac{a}{mP^{(m-1)}_{(m-2)}} n^{m} \mp$$

$$\left(\frac{mbP^{(m-1)}_{(m-1)} - aP^{(m)}_{(m-1)}}{mP^{(m-1)^2}_{(m-1)}}\right) n^{m-1} + Cn^{m-2} + Dn^{m-3} + \text{ec.}$$

$+ L$ sarà il termine general domandato, il quale non avendo determinati che i primi due coefficienti, mostra che ancora in questo secondo caso infinite sono le serie algebraiche di grado m, che hanno per le differenze $m-1$*esime* la stessa espressione $an+b$, e che i loro termini generali vengono tutti compresi nella truovata generale espressione.

Posto $m=4$, sia per esempio $24n+6$ l'espressione delle differenze terze. Per le (XVIII) avendosi $P^{(3)}_{(3)} = 3 \cdot 1^3 - 3 \cdot 2^3 + 3^3 = 6$, $P^{(4)}_{(3)} = 3 \cdot 1^4 - 3 \cdot 2^4 + 3^4 = 36$, ne verrà $n^4 - 5n^3 + Cn^2 + Dn + E$ pel termine generale richiesto. Paragonando col presente il termine supposto ad esempio nel ($n.$ 96), vedesi non essere quello, che un caso particolare di questo.

III. Facciasi $p=m-2$, e sia perciò an^2+bn+c (I. $n.°$ 97) l'espression generale delle differenze $m-2^{esime}$. Paragonando questa col valore della

$D^{(m-2)}$ esposto nelle (XXI. $n.^{\circ}$ 98), poichè risulta $\mp \frac{m(m-1)}{2} AP^{(m-2)}_{(m-2)} = a, \mp \left(mAP^{(m-1)}_{(m-2)} + (m-1) BP^{(m-2)}_{(m-2)} \right) = b, \mp \left(AP^{(m)}_{(m-2)} + BP^{(m-1)}_{(m-2)} + CP^{(m-2)}_{(m-2)} \right) = c$, avremo quindi tre Equazioni, nelle quali si deve prendere il segno superiore, o l'inferiore, secondochè $m-2$ è pari, o dispari, e dalle quali si può ricavare il valore delle quantità A, B, C: li ricavo pertanto; denominatili A', B', C' li sostituisco nella (VII), ed $A'n^{m} + B'n^{m-1} + C'n^{m-2} + Dn^{m-3}$ + ec. + L rappresenterà il chiesto termine generale. Quì ancora rimanendo gli ulteriori coefficienti D, ec. L indeterminati, saranno infinite le serie aventi la espressione delle differenze m—2*esime* $= an^2 + bn + c$.

Si voglia $m=6$, $D^{(4)} = 1080n^2 - 720n + 240$. Poichè si ha $P^{(4)}_{(4)} = 4 \cdot 1^4 - 6 \cdot 2^4 + 4 \cdot 3^4 - 4^4 = -24$, $P^{(5)}_{(4)} = 4 \cdot 1^5 - 6 \cdot 2^5 + 4 \cdot 3^5 - 4^5 = -240$, $P^{(6)}_{(4)} = 4 \cdot 1^6 - 6 \cdot 2^6 + 4 \cdot 3^6 - 4^6 = -1560$ (XVIII), e poichè $a = 1080$, $b = -720$, $c = 240$, risulteranno le tre Equazioni $360\,A = 1080$, $1440\,A + 120\,B = -720$, $1560\,A + 240\,B + 24\,C = 240$, e da ciò ottenendosi $A=3$, $B=-42$, $C=235$, il termine generale cercato sarà $3n^6 - 42n^5 + 235n^4 + Dn^3 + En^2 + Fn + G$.

IV. Sia ora in generale $p = m - q$, ed $an^{q} + bn^{q-1} + cn^{q-2}$ + ec. + $gn + i$ l'espressione delle differenze m—*gesime*. Dal paragone di questa

col valore della $D^{(m-q)}$ (XXI *n.*° 98) risultando

$$\mp \frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{2.3\ldots q} AP^{(m-q)}_{(m-q)} = a,$$

$$\mp \left(\frac{m(m-1)\ldots(m-q+2)}{2.3\ldots(q-1)} AP^{(m-q+1)}_{(m-q)} \right.$$

$$\left. + \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-q+1)}{2.3\ldots(q-1)} BP^{(m-q)}_{(m-q)} \right) = b, \text{ ec.}$$

si avranno $q+1$ Equazioni, dipendentemente dalle quali determino i valori delle $q+1$ quantità A, B, ec. I; chiamati questi A', B', ec. I', li sostituisco nella funzione (VII), e il termine general domandato sarà $A'n^m + B'n^{m-1} + C'n^{m-2} +$ ec. $+ G'n^{(m-q+1)} + I'n^{m-q} + I'n^{m-q-1} +$ ec. $+ L$.

Se sia $q = m-1$, e però $p=1$, onde $an^{m-1} + bn^{m-2}$ + ec. + i esprima le differenze prime; allora il termine generale sarà $A'n^m + B'n^{m-2} +$ ec. $+ K'n + L$, rimanendo indeterminato il solo ultimo coefficiente L.

Poichè qualunque sia il precedente intero q, purchè non < 0, e $< m$, sempre nel termine general che si truova, rimangono dei coefficienti arbitrarj, ne segue, che il Problema sarà sempre indeterminato, e quindi sempre infinite serie algebraiche dello stesso grado sono dotate d'una medesima espressione di differenze. Tale indeterminazione però apparisce dai (*prec.* I, ec. IV) essere tanto maggiore, quanto più grande è il numero $p = m - q$.

101. *Teor.* 3.° Supposti due numeri p, k entrambi maggiori dello zero, interi, e tali, che $p > k$, io dico, che il risultato, il quale si ottiene moltiplicando i termini della quantità $(1-1)^p - 1$

sviluppata pei termini corrispondenti della serie $1^k, 2^k, 3^k$, ec. p^k, uguaglia sempre lo zero.

Dim. Sviluppata la espressione $(1-1)^p-1$, e cangiatine i segni, il risultato, che ne viene, altro evidentemente non è, che uno dei (XVIII) del (*n.*° 98), onde giusta il (*I. n.*° 98) si rappresenterà dalla espressione $-P_{(p)}^{(k)}$; ma essendo per la ipotesi $p>k$, pel cit.° (I. *n.*° 98) si ha $P_{(p)}^{(k)}=0$. Dunque ec.

102. *Teor.* 4. Allorchè $p=k$, il precedente risultato (*n.*° 101) sarà $=\pm 1.2.3....p$, prendendosi il segno $+$, quando p è pari, il $-$ quando p è dispari.

Dim. Sviluppando attualmente nel (*n.*° 96) le espressioni $A\left((n+1)^m-n^m\right)$, $B\left((n+1)^{m-1}-n^{m-1}\right)$, $C\left((n+1)^{m-2}-n^{m-2}\right)$, ec., nella prima differenza $D=an^{m-1}+bn^{m-2}+cn^{m-3}+$ ec. cit. (*n.*° 96) apparisce dover essere $a=mA$. Ora nel modo stesso, come la D nasce da T, così D producesi la $D^{(2)}$, dalla $D^{(2)}$ la $D^{(3)}$, dalla $D^{(3)}$ la $D^{(4)}$, ec.; dunque nelle successive differenze $D^{(2)}=a'n^{m-2}+b'n^{m-3}+c'n^{m-4}+$ ec. $D^{(3)}=a''n^{m-3}+b''n^{m-4}+c''n^{m-5}+$ ec.; $D^{(4)}=a'''n^{m-4}+b'''n^{m-5}+c'''n^{m-6}+$ ec., ec.; avendosi $a'=(m-1)a$, $a''=(m-2)a'$, $a'''=(m-3)a''$, $a^{\prime v}=(m-4)a'''$, ec., con la successiva sostituzione otterremo $a=mA$, $a'=m(m-1)A$, $a''=m(m-1)(m-2)A$, $a'''=m(m-1)(m-2)(m-3)A$, $a^{\prime v}=m(m-1)(m-2)(m-3)\times(m-4)A$, ec., e però avendosi in generale $a^{(h)}=m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-h)A$, col porre $h=m-1$, ne verrà

$a^{(m-1)} = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 2.1$ A, ossia rovesciando $a^{(m-1)} = 1.2.3\ldots m$ A ; ma $a^{(m-1)} = D^{(m)}$ (*n.*° 96), e $D^{(m)} = \mp AP^{(m)}_{(m)}$ (XXI. *n.*° 98) prendendosi il segno superiore quando m è pari, l' inferiore quando m è dispari : dunque sarà $\mp AP^{(m)}_{(m)} = 1.2.3\ldots m$ A, e però, cangiata la lettera m nella p sarà $P^{(p)}_{(p)} = \mp 1.2.3\ldots p$; ma il risultato, che si suppone nel precedente (*n.*° 101), nella ipotesi di $p = k$ pel cit. (*n.* 101) diventa $= -P^{(p)}_{(p)}$. Dunque tal risultato sarà $= \pm 1.2.3\ldots p$, col prendersi il segno $+$, o l'altro $-$, secondo che il numero p è pari, o dispari *c. d. d.*

103. *Scol.* 8.° I. Sia $k = p+1$. Poichè per lo sviluppo delle potenze accennate nei (*n.*[i] 96, *prec.*) si ha nel valore della differenza D il secondo coefficiente $b = \frac{m(m-1)}{2} A - (m-1) B$, e quindi nelle successive differenze $D^{(2)}$, $D^{(3)}$, $D^{(4)}$, ec. risulta $b' = \frac{(m-1)(m-2)}{2} a + (m-2) b$, $b'' = \frac{(m-2)(m-3)}{2} a' + (m-3) b'$, $b''' = \frac{(m-3)(m-4)}{2} a'' + (m-4) b''$, ec.; ne verrà, sostituendo successivamente, $b = \frac{m(m-1)}{2} A + (m-1) B$, $b' = \frac{m(m-1)(m-2)}{2} 2A + (m-1)(m-2) B$, $b'' = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2} 3A + (m-1)(m-2)(m-3) B$,

$b''' = \frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{2} 4A + (m-1)\ldots(m-4)B$, e in generale $b^{(h)} = \frac{m(m-1)\ldots(m-h-1)}{2}(h+1)A + (m-1)(m-2)\ldots(m-h-1)B'$, e col fare $h=m-2$ avremo $b^{(m-2)} = \frac{m(m-1)\ldots 2.1}{2}(m-1)A + (m-1)(m-3)\ldots 2.1B$.

Ora pel (I. *n.*° 97) $D^{(m-1)} = a^{(m-2)}n + b^{(m-2)}$, onde per la seconda delle Equazioni (XXI) si ha $b^{(m-2)} = \mp\left(AP^{(m)}_{(m-1)} + BP^{(m-1)}_{(m-1)}\right)$. Dunque paragonando questo col precedente valore della $b^{(m-2)}$, si otterrà $\mp P^{(m)}_{(m-1)} = \frac{m(m-1)\ldots 2.1}{2}(m-1) = 1.2.3\ldots m \times \frac{m-1}{2}$, e supposto $m-1=p$ si avrà $P^{(p+1)}_{(p)} = \mp 1.2.3(p+1)\frac{p}{2}$, ma il risultato del (*n.*° 101) nel caso di $k=p+1$, è $=-P^{(p+1)}_{(p)}$: dunque questo risultato sarà $=\pm 1.2.3\ldots(p+1)\frac{p}{2}$, osservata, rapporto ai segni la regola del (*n.*° *prec.*).

II. Si ponga $k=p+2$. Dal solito sviluppo (*n.*ⁱ 96, *prec.*) apparisce essere nella D il terzo coefficiente $c = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}A + \frac{(m-1)(m-2)}{2}B + (m-2)C$, dunque nelle successive differenze $D^{(2)}, D^{(3)}, D^{(4)}$ ec. avendosi

$$c' = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}a + \frac{(m-2)(m-3)}{2}b + (m-3)c,$$

$$c'' = \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3}a' + \frac{(m-3)(m-4)}{2}b' + (m-4)c'$$

$$c''' = \frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{2\,.\,3}a'' + \frac{(m-4)(m-5)}{2}b'' + (m-5)c''$$

ec.

con la sostituzione otterremo

$$c = \frac{m\,(m-1)\ (m-2)}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{0}{2}\right)\ A +$$

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}B + (m-2)\,C\,,$$

$$c' = \frac{m\,(m-1)\ldots(m-3)}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)A +$$

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2}\,2B + (m-2)(m-3)\,C\,,$$

$$c'' = \frac{m\,(m-1)\ldots(m-4)}{2}\left(\frac{3}{3} + \frac{3}{2}\right)A +$$

$$\frac{(m-1)\,(m-2)\ldots(m-4)}{2}\,3B + (m-2)\ldots(m-4)\,C\,,$$

$$c''' = \frac{m(m-1)\ldots(m-5)}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{6}{2}\right)A +$$

$$\frac{(m-1)\ldots(m-5)}{2}\,4B + (m-2)\ldots(m-5)\,C\,,$$

$$c^{iv} = \frac{m(m-1)\ldots(m-6)}{2}\left(\frac{5}{3} + \frac{10}{2}\right)A +$$

$$\frac{(m-1)\ldots(m-6)}{2}\,5B + (m-2)\ldots(m-6)\,C\,,$$

ec.

Ora nei coefficienti della A i numeratori 1, 3, 6, 10, ec. delle frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, ec. formano una serie a differenze seconde costanti, il cui termine generale pel (n.° 95) si truova essere $\frac{h(h+1)}{2}$. Dunque avendosi

$$c^{(h)} = \frac{m(m-1)\ldots(m-h-2}{2})\left(\frac{h+1}{3} + \frac{h(h+1)}{2\,.\,2}\right)A +$$

$(m-1)$

$\frac{(m-1)\ldots(m-h-2)}{2}(h+2)B+(m-2)\ldots(m-h-2)C$,

col supporre $h=m-3$, ci verrà

$$c^{(m-3)}=\frac{1.2.3\ldots m}{2}\left(\frac{m-2}{3}+\frac{(m-3)(m-2)}{2.2}\right)A+$$

$$\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{2}(m-2)B+1.2.3\ldots(m-2)\,C\,.$$

Ora pel (I. *n.°* 97.) $D^{(m-2)}=a^{(m-3)}n^2+b^{(m-3)}n+c^{(m-3)}$, e quindi per la terza delle (XXI) si ha

$$c^{(m-3)}=\mp\left(AP^{(m)}_{(m-2)}+BP^{(m-1)}_{(m-2)}+CP^{(m-2)}_{(m-2)}\right).$$

Dunque tenendo conto de' soli termini, che moltiplicano A, avremo $\frac{1.2.3\ldots m}{2}\left(\frac{m-2}{3}+\frac{(m-3)(m-2)}{2.2.}\right)$ $=\mp P^{(m)}_{(m-2)}$, e posto $m-2=p$, sarà $P^{(p+2)}_{(p)}$ $=\mp\frac{1.2.3\ldots(p+2)}{2}\left(\frac{p}{3}+\frac{p(p-1)}{2.2}\right)$; onde il solito risultato (*n.°* 101), che è $=-P^{(p+2)}_{(p)}$, nel caso di $k=p+2$ sarà $=\pm\frac{1.2.3\ldots(p+2)}{2}\left(\frac{p}{3}+\frac{p(p-1)}{2.2}\right)$.

III. Facciasi $k=p+3$. Risultando perciò nelle D (*n.i* 96, *prec.*) il quarto coefficiente

$$d=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}A+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}B+$$

$$\frac{(m-2)(m-3)}{2}C+(m-3)D,$$ nelle $D^{(2)}, D^{(3)}, D^{(4)}$, ec. si avrà

$$d' = \frac{(m-1)\ldots(m-4)}{2.3.4}\,a + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3}\,b +$$
$$\frac{(m-3)\,(m-4)}{2}\,c + (m-4)\,d,$$

$$d'' = \frac{(m-2)\ldots(m-5)}{2\,.\,3\,.\,4}\,a' + \frac{(m-3)\,(m-4)\,(m-5)}{2\,.\,3}\,b' +$$
$$\frac{(m-4)\,(m-5)}{2}\,c' + (m-5)\,d',$$

$$d''' = \frac{(m-3)\ldots(m-6)}{2\,.\,3\,.\,4}\,a'' + \frac{(m-4)\,(m-5)\,(m-6)}{2.\,3}\,b'' +$$
$$\frac{(m-5)\,(m-6)}{2}\,c'' + (m-6)\,d'', \text{ ec.}$$

e quindi sostituendo, e tenendo conto per maggior semplicità de' termini soltanto, che contengono A, otterremo

$$d = \frac{m(m-1)\ldots(m-3)}{2} \times \frac{1}{3.4}\,\mathrm{A} + \text{ec.} = \frac{m\,(m-1)\ldots(m-3)}{2}$$
$$\left(\frac{1}{3.4} + \frac{0}{2.3} + \frac{0}{2.2}\right)\mathrm{A} + \text{ec.}$$

$$d' = \frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{2}\left(\frac{2}{3.4} + \frac{2}{2.3}\right)\mathrm{A} + \text{ec.} =$$
$$\frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{2}\left(\frac{2}{3\,.\,4} + \frac{2}{2\,.\,3} + \frac{0}{2\,.\,2}\right)\mathrm{A} + \text{ec.}$$

$$d'' = \frac{m(m-1)\ldots(m-5)}{2}\left(\frac{3}{3.4} + \frac{6}{2.3} + \frac{1}{2.2}\right)\mathrm{A} + \text{ec.}$$

$$d''' = \frac{m(m-1)\ldots(m-6)}{2}\left(\frac{4}{3.4} + \frac{12}{2.3} + \frac{4}{2.2}\right)\mathrm{A} + \text{ec.}$$

$$d^{\mathrm{iv}} = \frac{m(m-1)\ldots(m-7)}{2}\left(\frac{5}{3.4} + \frac{20}{2.3} + \frac{10}{2.2}\right)\mathrm{A} + \text{ec.}$$

$$d^{\mathrm{v}} = \frac{m(m-1)\ldots(m-8)}{2}\left(\frac{6}{3.4} + \frac{30}{2.3} + \frac{20}{2.2}\right)\mathrm{A} + \text{ec.}$$

ec.;

ma nelle frazioni aventi il denominatore 2.3 trovasi con le successive sottrazioni, che i numeratori

0, 2, 6, 12, 20, 30, ec. costituiscono una serie a differenze seconde costanti, il cui termine generale pel ($n.^o$ 95) è $= (h+1)h$, e i numeratori 0, 0, 1, 4, 10, 20, ec. dei rotti, che hanno per denominatore 2.2, si trova, che formano una serie a differenze terze costanti, il cui termine generale pel cit.° ($n.^o$ 95) è $= \frac{(h+1)(h)(h-1)}{2.3}$.

Dunque risultando

$$d^{(h)} = \frac{m(m-1)\ldots(m-h-3)}{2}\left(\frac{h+1}{3.4} + \frac{(h+1)h}{2.3} + \frac{(h+1)(h)(h-1)}{2.3.4}\right)A + \text{ec.},$$

ne verrà

$$d^{(m-4)} = \frac{1.2.3\ldots m}{2}\left(\frac{m-3}{3.4} + \frac{(m-3)(m-4)}{2.3} + \frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{2.3.4}\right)A + \text{ec.}$$

e siccome pei ($n.^i$ 96, 102) $D^{(m-3)} = a^{(m-4)}n^3 + b^{(m-4)}n^2 + c^{(m-4)}n + d^{(m-4)}$, dal paragone col quarto dei sisultati (XXI) otterremo

$$\frac{1.2.3\ldots m}{2}\left(\frac{m-3}{3.4} + \frac{(m-3)(m-4)}{2.3} + \frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{2.3.4}\right)$$

$$= \mp P^{(m)}_{(m-3)}, \text{ e però fatto } m-3=p,$$

$$P^{(p+3)}_{(p)} = \mp \frac{1.2.3\ldots(p+3)}{2}\left(\frac{p}{3.4} + \frac{p(p-1)}{2.3} + \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3.4}\right),$$

onde il solito risultato ($n.^o$ 101) nel caso di $k=p+3$ sarà, osservata la solita precedente regola de' segni,

$$= \pm \frac{1.2.3\ldots(p+3)}{2}\left(\frac{p}{3.4} + \frac{p(p-1)}{2.3} + \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3.4}\right).$$

IV. Mentre si voglia $k=p+4$, $p+5$, ec., potranno sempre determinarsi con gli stessi metodi de' (prec.i II, III, IV) delle espressioni, a cui si uguagliano le altre $P_{(p)}^{(p+4)}$ $P_{(p)}^{(p+5)}$, ec.; esse però riesciranno sempre più complicate, quanto k diverrà più grande.

Col mezzo poi delle indicate espressioni (prec.i I, II, ec.) vedesi, che potremo tante volte sciogliere più semplicemente i Problemi de' (n.i 98, 100); e vedesi, che dalle proprietà ora dimostrate (n.i 101, ec.) altre se ne possono dedurre appartenenti ai numeri.

104. *Probl.* 8.° Determinare la serie, nella quale giusta il (n.° 77) si sviluppa la funzione

(XXII) $$\frac{M+Nx+Px^2+\text{ec. } Vx^m}{(1-x)^{m+1}},$$

in cui la x ha un valore indeterminato.

Sol. Sciolta perciò la potenza $(1-x)^{m+1}$, e supposto

(XXIII) $$\frac{M+Nx+Px^2+\text{ec.}+Vx^m}{1-(m+1)x+(m+1)\frac{m x^2}{2}\mp\text{ec.}\mp(m+1)x^m\pm x^{m+1}}=T_1+T_2x+$$

$$T_3x^2+\text{ec.}+T_{m+1}x^m+T_{m+2}x^{m+1}+T_{m+3}x^{m+2}+\text{ec.};$$

non si avranno per la soluzion del Problema, che a trovare i valori de' coefficienti T_1, T_2, T_3, ec.,

Moltiplicato a tal fine pel denominatore $1-(m+1)x$ + ec., poichè risulta

$$M+Nx+Px^2+\text{ec.}+Vx^m=$$
$$T_1+T_2x+T_3x^2+\text{ec.}+T_{m+1}x^m+T_{m+2}x^{m+1}+$$

$$T_{m+3}\, x^{m+3} + \text{ec.} - (m+1) T_1\, x - (m+1) T_2\, x^2 - \text{ec.} -$$

$$(m+1) T_m\, x^m - (m+1) T_{m+1}\, x^{m+1} - (m+1) T_{m+1}\, x^{m+2}$$

$$- \text{ec.} + \frac{(m+1)m}{2} T_1\, x^2 + \text{ec.} + \frac{(m+1)m}{2} T_{m-1}\, x^m +$$

$$\frac{(m+1)m}{2} T_m\, x^{m+1} + \frac{(m+1)m}{2} T_{m+1}\, x^{m+2} + \text{ec.}$$

ec.

$$\mp (m+1) T_1\, x^m \mp (m+1) T_2\, x^{m+1} \mp (m+1) T_3\, x^{m+2} \mp \text{ec.}$$

$$\pm T_1\, x^{m+1} \pm T_2\, x^{m+2} \pm \text{ec.}$$

e poichè la x deve per la ipotesi essere indeterminata, e quindi l' Equazione (XXIII) verificarsi indipendentemente dalla x medesima pel (I. $n.^o$ 202. *Alg.*) dovrà essere

$$T_1 = M,\ T_2 - (m+1) T_1 = N,\ T_3 - (m+1) T_2 + \frac{(m+1)m}{2} T_1 = P \text{ ec.}$$

$$T_{m+1} - (m+1) T_m + \frac{(m+1)m}{2} T_{m-1} - \text{ec.} \mp (m+1) T_1 = V, \qquad \text{(XXIV)}$$

$$T_{m+2} - (m+1) T_{m+1} + \frac{(m+1)m}{2} T_m - \text{ec.} \mp (m+1) T_2 \pm T_1 = 0,$$

$$T_{m+3} - (m+1) T_{m+2} + \frac{(m+1)m}{2} T_{m+1} - \text{ec.} \mp (m+1) T_3 \pm T_2 = 0,$$

ec.

Si ponga ora $T_2 = An^m + Bn^{m-1} + Cn^{m-2} +$ ec. $+ L$ (VII. *n.*° 91); col fare $n = 1, 2, 3$, ec. $m+1$ si avranno quindi $m+1$ Equazioni, col mezzo delle quali si otterranno, come nel (*n.*° 95), i valori degli $m+1$ coefficienti A, B, C, ec. L espressi pei termini T_1, T_2, T_3, ec. T_{m+1}; ma i valori di questi termini ricavansi espressi mediante gli $m+1$ coefficienti M, N, P, ec. V della funzione (XXII), servendoci delle prime $m+1$ tra le Equazioni (XXIV). Dunque, eseguite le operazioni necessarie alle determinazioni ora accennate, si avranno così i valori dei coefficienti del termine (VII) da noi supposto, e per esso inoltre si soddisfarà alle prime $m+1$ delle Equazioni (XXIV). Ma essendo m il grado del supposto (VII); nella serie corrispondente risulta $D_1^{(m+1)} = 0$, $D_2^{(m+1)} = 0$, $D_3^{(m+1)} = 0$, ec. (I. *n.*° 97), e queste differenze $D_1^{(m+1)}$, $D_2^{(m+1)}$, $D_3^{(m+1)}$ ec. uguagliano pel (*n.*° 83) nelle (XXIV) i primi membri delle Equazioni $m+2$ *esima*, $m+3$ *esima*, $m+4$ *esima*, ec., i quali tutti sono $= 0$. Dunque il supposto termine (VII), nel quale si siano determinati i coefficienti nel modo sovraccennato, essendo tale che soddisfa a tutte le Equazioni (XXIV), sarà esso evidentemente il termine generale della serie T_1, T_2, T_3, ec., e facendo per conseguenza in esso $n = 1, 2, 3$, ec., si otterranno tutti i coefficienti della supposta serie (XXIII), e quindi la soluzione del Problema.

Sia per esempio $\frac{10-5x+x^3}{(1-x)^4}$ la funzione data. Eseguendo il calcolo precedente troveremo $T_1=10$, $T_2-4T_1=-5$; $T_3-4T_2+6T_1=0$, $T_4-4T_3+6T_2-4T_1=1$, $T_5-4T_4+6T_3-4T_2+T_1=0$, ec. e però $T_1=10$, $T_2=35$, $T_3=80$, $T_4=151$. Ciò fatto, poichè $m=3$, suppongo $T_n=An^3+Bn^2+Cn+D$, faccio quindi $n=1, 2, 3, 4$, formo le Equazioni $A+B+C+D=10$, $8A+4B+2C+D=35$, $27A+9B+3C+D=80$, $64A+16B+4C+D=151$, e ricavato da queste (*n.*° 95) $A=1$, $B=4$, $C=6$, $D=-1$, il termine generale richiesto sarà n^3+4n^2+6n-1.

105. *Prob.* 9.° Data una serie algebraica del grado m, il cui termine generale T_n uguaglia la funzione (VII), cercasi quella funzione, dal cui sviluppo (*n.*° 77) nasce la serie $T_1+T_2x+T_3x^2+T_4x^3+$ ec.

Sol. Poichè tanti sono i coefficienti della (VII) quanti quelli del numeratore nella funzione (XXII), e poichè dallo sviluppo di questa nasce pel (*n.*° *prec.*) una serie, i coefficienti della quale non sono che i successivi valori della (VII); ne segue che la funzione chiesta dal Problema dovrà avere la forma della (XXII). Supposta per tanto l'Equazione (XXIII), nella quale i coefficienti M, N, P, ec. V si prendono indeterminati, trovo, come nel (*n.*° *prec.*) le prime $m+1$ delle Equazioni (XXIV), e scoperti col loro mezzo i valori degl' indicati coefficienti M, N, P, ec. V, li sostituisco nella (XXII), ed avrò così risolto il Quesito.

Se $n^4 - 10n^2 + 7$ sia il termine generale della serie data, avendosi $T_1 = -2$, $T_2 = -17$, $T_3 = -2$, $T_4 = 103$, $T_5 = 382$ pongo nella (XXIII) in luogo delle T_1, T_2, ec. questi valori, in luogo dell' esponente m il 4, e poichè, truovate le Equazioni (XXIV), risulta $M = -2$, $N = -7$, $P = 63$, $Q = -37$, $V = 7$, sarà $\frac{-2 - 7x + 63x^2 - 37x^3 + 7x^4}{(1-x)^5}$ la funzione cercata.

106. *Def.* 9.ª Denominato y il primo membro della (XXIII), e poste nel membro secondo per maggiore semplicità le lettere a, b, c, d, e, ec. invece delle T_1, T_2, T_3, ec. cosicchè si abbia

(XXV) $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{ec.}$, se ora da questa si voglia dedurre un' altra Equazione, nella quale il primo membro sia la x, ed il secondo una serie contenente la y; l' operazione, per cui ciò si eseguisce, dicesi *Regresso* delle serie.

107. *Probl.* 10. Eseguire il Regresso nella data serie (XXV).

Sol. Posto $y - a = u$, poichè quando $x = 0$ nella (XXV) risulta $y = a$, e però $u = 0$, si faccia

(XXVI) $x = \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \text{ec.}$

ove i coefficienti α, β, γ, δ, ec. sono da determinarsi opportunamente. Si sostituisca nella (XXV) in luogo della x il secondo membro della (XXVI), e risultando da ciò

$$
\begin{aligned}
u = b\alpha u + b\beta u^2 &+ b\gamma u^3 + b\delta u^4 + \text{ec.} \\
+ c\alpha^2 u^2 &+ 2c\alpha\beta u^3 + 2c\alpha\gamma u^4 + \text{ec.} \\
&+ c\beta^2 u^4 + \text{ec.} \\
&+ d\alpha^3 u^3 + 3d\alpha^2\beta u^4 + \text{ec.} \\
&+ e\alpha^4 u^4 + \text{ec.} \\
&\text{ec.},
\end{aligned}
$$

per la ragione stessa, che si è addotta nel ($n.^o$ 104), si otterrà $b\alpha = 1$, $b\beta + c\alpha^2 = 0$, $b\gamma + 2c\alpha\beta + d\alpha^3 = 0$, $b\delta + 2c\alpha\gamma + c\beta^2 + 3d\alpha^2\beta + e\alpha^4 = 0$, ec., e per conseguenza $\alpha = \frac{1}{b}$, $\beta = -\frac{c}{b^3}$, $\gamma = \frac{2c^2 - bd}{b^5}$, $\delta = \frac{5bcd - b^2e - 5c^3}{b^7}$, ec. Sostituisco questi valori nella (XXVI), pongo $y - a$ invece della u, e risulterà per la soluzion del problema

$$x = \frac{(y-a)}{b} - \frac{c(y-a)^2}{b^3} + \frac{(2c^2-bd)(y-a)^3}{b^5} - \frac{(5c^3+b^2e-5bcd)(y-a)^4}{b^7} + \text{ec.}$$

Nell'esempio del ($n.^o$ 104), ove si ha $y = \frac{10-5x+x^3}{(1-x)^4}$, ed $a=10$, $b=35$, $c=80$, $d=151$, $e=254$, ec., otterremo

$$x = \frac{(y-10)}{35} - \frac{80(y-10)^2}{35^3} + \frac{7495(y-10)^3}{35^5} - \frac{749150(y-10)^4}{35^7} + \text{ec.}$$

108. *Scol.* 9.° Presi nella solita serie T_1, T_2, T_3, ec. due termini $T_{(N-1)p+N}$, T_{Np+N+1}, in cui N, e p siano due numeri interi, e positivi, poichè, posto $(N-1)p+N=h$ si ha $T_{(N-1)p+N}=T_h$, e $T_{Np+N+1}=T_{h+p+1}$, apparisce che tra i supposti due termini esistono altri p termini della serie data, cioè i termini T_{h+1}, T_{h+2}, ec. T_{h+p}.

109. *Def.* 2.ª Supposto nel termine $T_{(N-1)p+N}$ ($n.^o$ *prec.*) N successivamente $=1, 2, 3$, ec., la serie T_1, T_{p+2}, T_{2p+3}, T_{3p+4} ec. suol dirsi rapporto alla prima T_1, T_2, T_3, ec. *interrotta*, poichè difatti non è essa, che la prima, trascura-

ti fra ogni due p termini (*n.° prec.*). La prima poi rapporto alla serie interrotta suol dirsi *continuata*.

110. *Probl.* 11.° Data la serie algebraica, il cui termine generale è la funzione (VII), si domanda il termine generale della sua serie interrotta (*n.° prec.*) per un interrompimento di p termini.

Sol. Ritenuto denotarsi con la T_n la funzione (VII), si esprima con la t_N il termine generale, che si cerca: Ora dal termine T_n ottienesi l'altro t_N sempre, e solamente ogniqualvolta si ponga $(N-1)p+N$ invece di n (*n.° prec.*), cosicchè $T_{(N-1)p+N} = t_N$, qualunque sia l' intero N. Dunque per la soluzione del Problema proposto non si avrà che a porre nella (VII) $= T_n$ invece di n il valore $(N-1)p+N=(p+1)N-p$, e la funzione in N, che se ne ottiene, sarà evidentemente il termine generale t_N della chiesta serie interrotta.

Venga data ad esempio la serie
$-2, -7, -8, 1, 26, 73, 148, 257, 406, 601$, ec.
nella quale $T_n = n^3 - 4n + 1$; si voglia il termine t_N con un interruzione di due termini, cosicchè $p = 2$. Pongo perciò $n = 3N - 2$, sostituisco, e risulterà $t_N = 27N^3 - 90N^2 + 84N - 23$. Posto difatti $N = 1, 2, 3, 4$, ec. ne verranno i termini -2, 1, 148, 601, ec., i quali non sono che il primo, il quarto, il decimo, ec. della serie proposta, come si cercava.

111. *Probl.* 12.° Essendo

$$aN^{m} + bN^{m-1} + cN^{m-2} + \text{ec.} + l = t_{N} \quad \text{(XXVII)}$$

il termine generale di una serie algebraica, che supporrò essere interrotta per p, termini, truovare il termine generale T_n della corrispondente serie continuata.

Sol. Ridotta la funzione (XXVII) alla forma

$$A((p+1)N-p)^{m} + B((p+1)N-p)^{m-1} + C((p+1)N-p)^{m-2} \quad \text{(XXVIII)}$$

+ ec. + L, il che è chiaro, che può sempre farsi, poichè si possono sempre determinare opportunamente i coefficienti A, B, C, ec. L, si ponga $(p+1)N-p=n$, onde abbiasi il risultato

$$An^{m} + Bn^{m-1} + Cn^{(m-2)} + \text{ec. L.} \quad \text{(VII)}$$

Ora quest' ultimo a cagione di $n=(p+1)N-p$ altro non è pel (*n.° prec.*) che il termine generale di una serie continuata, a cui corrisponde come serie interrotta per p termini, quella serie, che ha per termine generale la funzione (XXVIII), e però la (XXVII). Dunque la funzione (VII) altro non sarà, che il termine general domandato: ma essa (VII) risulta evidentemente dalla (XXVIII) col porre $\frac{n+p}{p+1}$ in vece di N. Dunque risultando nella stessa maniera anche dalla (XXVII), si avrà la soluzion del Problema, col porre nel termine generale proposto in luogo della N la espressione $\frac{n+p}{p+1}$.

Perciò se posto $p=2$, si faccia nella $27N^3 - 90N^2 + 34N - 23$ del (*n.° prec.*) $N=\frac{n+2}{3}$, si otterrà pel termine generale della corrispondente serie continuata la funzione n^3-4n+1, come di-

fatti dal citato (*n.° prec.*) apparisce dover essere.

112. *Scol.* 10.° I. Vedremo fra poco, come si possano in pratica agevolare le sostituzioni indicate ne' precedenti (*n.i* 110, 111).

II. Qualunque sia l'intero p indicante il numero dei termini tralasciati; dai prec.i (*n.i* 110, 111) apparisce, che se la continuata è serie algebraica, tale è ancora la interrotta, e viceversa, e che amendue queste serie sono dello stesso grado.

III. È facile a vedersi, che tutti quei termini, i quali si ottengono dalla (XXVII) col porre successivamente $N = 1, 2, 3, 4$, ec. risultano ancora dalla (VII), mentre si faccia in corrispondenza $n = 1, p+2, 2p+3, 3p+4$ (*n.°* 110); e viceversa quei termini, che ponendo $n = 1, 2, 3, 4$, ec. ricavansi dalla (VII), si ritraggono tutti ezian-dio dalla (XXVII), facendo $N = 1, \frac{p+2}{p+1}, \frac{p+3}{p+1}, \frac{p+4}{p+1}$, ec. (*n.°* 111).

113. *Def.* 11.ª Dati gli h termini $T_{n'}$, $T_{n''}$, $T_{n'''}$, ec. $T_{n^{(h)}}$ di una serie corrispondenti agli h valori n', n'', n''', ec. $n^{(h)}$ del numero n, il metodo di determinare il valore di uno, o più altri termini intermedj ai proposti, e che seguano la legge medesima, quello è, che si chiama *metodo d'interpolazione*.

114. *Probl.* 13.° Supposto, che i termini $T_{n'}$, $T_{n''}$, ec. $T_{n^{(h)}}$ (*n.° prec.*) appartengano ad una serie algebraica del grado m, trovare il valore dei termini, che nella serie medesima appartengono ai numeri $n^{(g')}$, $n^{(g'')}$, $n^{(g''')}$, ec.

Sol. O abbiamo il numero degli n', n'' ec. $n^{(h)} > m$, o non l'abbiamo; se sì; allora ritrovo pel (*n.*° 95) il termine generale della serie data, e supposto essere questo la funzione (XXVII) non avremo per la soluzion del problema, che a porre in esso successivamente $N = n^{(g')}$, $n^{(g'')}$, $n^{(g''')}$, ec. Che se l'accennato numero degli n', n'', ec. $n^{(h)}$ sia non $> m$, cercherò anche allora l'indicato termine generale (XXVII); ma rimanendo in esso, come apparisce dal cit.° (*n.*° 95) uno o più coefficienti indeterminati, i valori dei termini richiesti risulteranno diversi secondo la diversità de' valori, che si vorranno attribuire a tali coefficienti rimasti indeterminati. In questo secondo caso adunque il Problema è necessariamente indeterminato.

Se poi supposto $n' = 1$, $n'' = 2$, $n''' = 3$, ec. $n^{(h)} = m + 1$, fra ogni due termini della nostra serie si vogliono interpolare altri p termini, i quali seguano la legge medesima: allora truovato il termine generale (XXVII) (*n.*° 95), non dovremo evidentemente, che o porre in esso successivamente $N = \frac{p+2}{p+1}$, $\frac{p+3}{p+1}$, ec. $\frac{2p+2}{p+1}$; $\frac{2p+3}{p+1}$, $\frac{2p+4}{p+1}$, ec. $\frac{3p+2}{p+1}$; ec. (III. *n.*° 112), ovvero fatto nel termine (XXVII) $N = \frac{n+p}{p+1}$, e determinata così la funzione (VII) (*n.*° 109), fare poi in essa successivamente $n = 2$, 3, ec. $p+1$; $p+3$, $p+4$, ec. $2p+2$; ec. In simile guisa tutti potremo ottenere i p termini, che s'interpongono fra ogni due dei T_1, T_2, T_3, ec.

Data per esempio la serie 2, 2, 4, 8, 14, 21, 32, ec. il cui termine generale è N^2-3N+4, vogliansi in essa interpolare tre termini fra ogni due. Supposto perciò $N=\frac{n+3}{4}$, ritruovo, come nel (*n.*° 111), la funzione $\frac{n^2-6n+37}{16}$, e posto n successivamente $=2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12$, ec. i tre termini da interporsi tra i primi due termini 2, 2 della serie data, saranno $\frac{27}{16}$, $\frac{28}{16}$, $\frac{29}{16}$, quelli da interporsi fra i due 2, 4 saranno $\frac{37}{16}$, $\frac{44}{16}$, $\frac{53}{16}$, così gli altri da interporsi ai due 4, 8 saranno $\frac{77}{16}$, $\frac{92}{16}$, $\frac{109}{16}$, e così di seguito. Supponendo $n=1, 5, 9, 13$, ec. è chiaro che deggiono risultare i termini 2, 2, 4, 8, ec. della serie data.

CAPO III.

Dei Numeri poligoni, e dei figurati; delle serie Geometriche, e delle Armoniche.

115. *Def.* 12.ª Suppongansi i due termini generali

$$t = (a-1)\,n - (a-2), \quad T = \frac{(a-1)n^2 - (a-3)n}{2}, \qquad \text{(XXIX)}$$

de' quali il secondo uguaglia la somma generale della serie espressa dal primo (*n.*° 94), ed il primo esprime una serie algebraica di 1.° grado (*n.*° 91), ossia una serie aritmetica (*n.*ⁱ 96, 84), in cui il primo termine è 1, il secondo a, e la differenza costante è $n-1$. Si faccia successivamente $a = 1, 2, 3, 4, 5$, ec. e nella sottoposta Tavola (XXX) si scrivano le serie, che nascono in corrispondenza; avremo

1.° $a=1$, $t=1$, 1.ª serie	1,	1,	1.	1,	1,	1,	ec.	
$T=n$, 2.ª serie	1,	2,	3,	4,	5,	6.	ec.	
2.° $a=2$, $t=n$, 1.ª serie	1,	2,	3,	4,	5,	6,	ec.	
$T=\frac{n(n+1)}{2}$ 2.ª serie	1,	3,	6,	10	15,	21,	ec.	
3.° $a=3$, $t=2n-1$, 1.ª serie	1.	3,	5,	7,	9,	11,	ec.	
$T=n^2$, 2.ª serie	1,	4,	9,	16,	25,	36,	ec.	(XXX)
4.° $a=4$, $t=3n-2$, 1.ª serie	1,	4,	7,	10,	13,	16,	ec.	
$T=\frac{n(3n-1)}{2}$ 2.ª serie	1,	5,	12,	22,	35,	51,	ec.	
5.° $a=5$, $t=4n-3$, 1.ª serie	1,	5,	9,	13,	17,	21,	ec.	
$T=n(2n-1)$ 2.ª serie	1,	6,	15,	28,	45,	66,	ec.	

ec.

Ciò fatto, i numeri, che formano la serie seconda chiamansi *lineari*, quelli della serie quarta si dicono *triangolari*, *quadrati* quelli della sesta, *pentagoni* quelli dell' ottava, e così di seguito, chiamandosi perciò in generale numeri *poligoni* del grado $a+1$ quelli, che nascono dal termine generale $T=\frac{(a-1)n^2-(a-3)n}{2}$.

116. *Scol.*° 11.° I. Ai numeri delle accennate serie seconda, quarta, e sesta si è dato rispettivamente il nome di lineari, triangolari, e quadrati; perchè con tanti punti, quante sono le unità, che si contengono negl' indicati numeri, si possono esattamente formare tante rette, tanti triangoli regolari, tanti quadrati, i quali abbiano a ciascun lato tanti punti, quante unità esistono nel numero n. Con tanti punti poi quante sono le unità dei numeri delle serie ottava, decima ec. si possono bensì formare rispettivamente tanti pentagoni, esagoni, ec., ma riescendo questi generalmente di forma non così regolare, come i triangoli, od i quadrati, sembra che agli accennati numeri siasi più per analogia, che per altro attribuito il nome di pentagoni, esagoni ec.

II. Dalla tavola (XXX), e più generalmente da quanto si è detto nel (*n.*° 115) apparisce, che i numeri poligoni non sono, che le somme successive dei termini di tante serie aritmetiche, le quali tutte cominciano per 1, ed hanno per differenza costante, rapporto ai numeri lineari, lo zero, rapporto ai triangolari la unità, rapporto ai quadrati il due, il tre relativamente ai pentagoni, e così di seguito.

117. *Probl.* 14.° Cercansi le somme dei numeri poligoni.

Sol. Si truovi giusta il (*n.*° 94) la somma generale della serie avente il termine $T=\frac{(a-1)n^2-(a-3)n}{2}$ (XXX);

(XXIX): avremo da ciò $S = \frac{(a-1)n^3 + 3n^2 - (a-4)n}{2.3}$;

ma $(a-1)n^3 + 3n^2 - (a-4)n = ((a-1)n - (a-4))(n+1)n$. Dunque risultando

$$S = \frac{((a-1)n - (a-4))(n+1)n}{2.3},$$

col porre successivamente $a = 1, 2, 3, 4$, ec. si otterrà per la somma

$$\begin{aligned} &\text{dei numeri lineari} && S = \frac{(n+1)n}{2}, \\ &\text{dei triangolari} && S = \frac{(n+2)(n+1)n}{2.3}, \\ &\text{dei quadrati} && S = \frac{(2n+1)(n+1)n}{2.3}, \\ &\text{dei pentagoni} && S = \frac{(n+1)n^2}{2}, \\ &\text{ec.} \end{aligned} \qquad \text{(XXXI)}$$

118. *Def.* 13. Ai numeri, che risultano dalle somme ora truovate si dà il nome di *Piramidali*, ed è facile il vedersene la ragione.

119. *Scol.* 12.° Potremo ora stabilire le formole generali, per cui si calcolano agevolmente le palle da cannone, che si contengono nei mucchj soliti a formarsi negli arsenali. Imperocchè questi mucchj sogliono essere

1.° o piramidi regolari a base triangolare,

2.° o piramidi regolari a base quadrata,

3.° o mucchj, in cui ciascuno strato è di figura rettangola avente il lato longitudinale maggiore del trasversale, e frattanto, ascendendo, sì l'uno, che l'altro degli accennati lati contiene una palla di meno del prossimo inferiore,

4.° o finalmente, poste ad una determinata distanza due piramidi a base quadrata regolari, uguali fra loro, ed aventi i lati delle loro basi fra lor paralleli, e collocati fra le medesime due

perpendicolari, si forma tra queste piramidi un mucchio di palle a base rettangola, il quale dalle parti delle piramidi ascende, appoggiandosi ai dorsi delle piramidi medesime, e dalle parti degli altri due lati ascende a foggia di scarpa, siccome i mucchj del (*prec*, 3.°).

Ora nel primo degli accennati casi, chiamato n il numero delle palle, che formano il lato della base triangolare, pel (*n*,° 117) la seconda delle formole (XXXI) esprimerà evidentemente il numero totale delle palle, che si contengono nel mucchio corrispondente.

Tal numero di palle verrà nel caso secondo rappresentato dalla terza delle formole (XXXI), posto n il numero delle palle contenute nel lato della base quadrata.

Nel caso 3.° denominato $p+1$ il numero delle palle, che esistono nella cresta del mucchio, e q quello delle palle costituenti il lato minore della base, si osservi, che per la natura del mucchio medesimo (*prec*, 3.°) nello strato immediatamente sottoposto alla cresta deggiono esistere $2(p+2)$ palle, nell'altro, che succede a questo discendendo, ne deggiono esistere $3(p+3)$, nel susseguente $4(p+4)$, e così di seguito fino allo strato, che serve di base, nel quale si conteranno per conseguenza $q(p+q)$ palle. Dunque il numero totale delle palle sarà $(p+1)+2(p+2)+3(p+3)+4(p+4)$, $+$ ec. $+q(p+q)=$ $p(1+2+3+4+\text{ec.}+q)+(1^2+2^2+3^2+4^2+\text{ec.}+q^2)=$ $p.\frac{q(q+1)}{2}+\frac{2q+1)(q+1)q}{2.3}=\frac{(3p+2q+1)(q+1)q}{2.3}$.

Chiamato nel 4.° caso r il numero delle palle esistenti nel lato della base quadrata di ciascuna delle due piramidi laterali, chiamato $p-1$ il numero delle palle, che formano la cresta nel mucchio intermedio, e q il numero delle palle, le quali nella base di quest' ultimo formano il lato, che è a contatto con una delle piramidi laterali;

le palle totali del mucchio di mezzo verranno evidentemente costituite dalla somma $(p-1)+2(p-2)$
$+3(p-3)+4(p-4)+\text{ec.}+q(p-q)=\frac{(3p-2q-1)(q+1)q}{2.3}$,
e per conseguenza, comprendendovi le piramidi laterali, la somma intera delle palle sarà

$$\frac{(3p-2q-1)(q+1)q+2(2r+1)(r+1)r}{2,3}.$$

La sola formola $\frac{(3p\pm 2q\pm 1)(q+1)q}{2.3}$ esprimerà il numero delle palle, che si contengono nei mucchj rettangolari (*prec.* 3.°, 4.°); mentre si prendano i segni superiori nel caso del (*prec.* 3.°), gl'inferiori nel caso del (*prec.* 4.°). Se presi i segni superiori, si faccia $p=0$, la formola istessa servirà evidentemente pel caso del (*prec.* 2.°); e se finalmente, ritenuto $p=0$, si cambj il fattore $2q+1$ nell'altro $q+2$, ne verrà la formola pel caso del (*prec.* 1.°).

Ognuno può agevolmente applicare a degli esempj le formole ora truovate. Se negli accennati mucchj invece degli esposti vengano dati altri lati; la natura de' mucchj medesimi, e la Geometria Elementare somministreranno facilmente i mezzi onde far uso delle sovraesposte formole nella determinazione delle palle.

120. *Probl.* 15.° Si cerca il termine generale di quella serie, nella quale si ha la somma generale

$$S=\frac{n(n(+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+p)}{1.2.3\ldots p(p+1)} \qquad \text{(XXXII)}$$

Sol. Posto $n-1$ invece di n, poichè risulta

$$S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+p)}{1.2.3\ldots p(p+1)}$$
$$-\frac{(n-1)(n)(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots p(p+1)}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+p-1)(n+p-n+1)}{1.2.3\ldots p(p+1)}$$

$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots p}$, pel (II. *n.*° 81) otterremo

(XXXIII) $$T = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots p}.$$

121. *Probl.* 16.° Dato il termine generale

(XXXIV) $$T = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+q)}{1.2.3\ldots q(q+1)},$$

truovare la somma corrispondente.

Sol. Poichè supposto $q = p - 1$, il termine (XXXIV) cangiasi nel (XXXIII), e questo (XXXIII) non è che il termine generale corrispondente alla somma (XXXII) (*n.*° *prec.*); ne segue, che essa (XXXII), cambiata la lettera p in $q+1$, esprimerebbe la somma, che corrisponde al termine (XXXIV). Ora pel (III. *n.*° 81) nel determinare una somma, devesi per la dovuta generalità aggiungere una quantità indipendente da n: dunque, chiamata questa C, avremo

$S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+q+1)}{1.2.3\ldots(q+1)(q+2)} + C$; ma fatto

$n = 1$, risulta $T_1 = \frac{1.2.3\ldots(q+1)}{1.2.3\ldots(q+1)} = 1$,

$S_1 = \frac{1.2.3\ldots(q+2)}{1.2.3\ldots(q+2)} + C = 1 + C$, e pel (I. *n.*° 81) si ha $T_1 = S_1$. Dunque avendosi $1 = 1 + C$, sarà $C = 0$, e per conseguenza

(XXXV) $$S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+q+1)}{1.2.3\ldots(q+2)}$$

sarà la somma general domandata.

122. *Cor.* I. La somma della serie, che ha per termine generale la formola (XXXIV) si ottiene adunque, aggiungendo semplicemente al numeratore di questa il fattore $n+q+1$, e al denominatore l'al-

tro $q+2$ (*n.° prec.*); e il termine generale della serie, che ha per somma la formola (XXXII), si ottiene togliendo dal dividendo, e dal divisore di essa (XXXII) gli ultimi fattori $n+p$, $p+1$.

II. Col supporre nelle (XXXIII), (XXXII) p, e nelle (XXXIV), (XXXV) $q+1$ successivamente $=1$, 2, 3, 4, 5, ec. poichè risulta in corrispondenza

$$T = \frac{n}{1},\ \frac{n(n+1)}{1.2},\ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},\ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4},$$
$$\frac{n(n+1)\ldots(n+4)}{1.2.3.4.5}\ \text{ec.}$$

$$S = \frac{n(n+1)}{1.2},\ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},\ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4},\qquad \text{(XXXVI)}$$
$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5},\ \frac{n(n+1)\ldots(n+5)}{1.2\ldots6},\ \text{ec.}$$

vedesi.

1.°, che i numeri della prima delle serie, che quindi si producono aventi il termine generale $\frac{n}{1}$, non sono che i numeri lineari (*n.°* 115), che quelli della serie seconda, in cui $T = \frac{n(n+1)}{1.2}$, non sono pel cit.° (*n.°* 115), che i triangolari, e quelli della terza, ove $T = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$, non sono che i piramidali a base triangolare (*n.°* 118). È in conseguenza di ciò, che, seguendo una semplice analogia, ai numeri tutti delle serie, le quali hanno per termine generale una funzione della forma della (XXXIII); si dicono *Numeri figurati*, chiamandosi poi figurati di 1.° *Ordine* quelli, ne' quali $p=1$, figurati dell'*Ordine* 2.° quelli, in cui $p=2$, del 3.° quelli, in cui $p=3$; e così di seguito. La prima delle linee (XXXVI) espone i termini generali di questi ordini successivi de' Numeri figurati.

2.° Paragonando i termini della prima delle linee (XXXVI) con i termini della seconda, e in generale la formola (XXXIII) con la (XXXII), apparisce che le somme successive de' numeri figurati del 1.° ordine non sono che i numeri figurati del ordine 2.°; le somme successive de' numeri figurati del 2.° ordine non sono che i figurati dell' ordine 3.°, e in generale le somme successive de' numeri figurati dell' ordine *pesimo* sono i numeri figurati dell' ordine *p*+1*esimo*.

3.° I termini generali dei Numeri figurati non sono, prescindendo dal segno, che i coefficienti numerici della Formola Newtoniana, allorchè l' esponente della potenza è negativo (V. *n.*° 204. *Alg.*).

123. *Scol.* 13.° Quanto si è ora detto (*n.*° *prec.*) dei Numeri figurati, potrà servirci a dimostrare i metodi esposti nei (*n.* i 206, 269. *Alg.*, *n.*° 92).

I.° Rapporto difatti al metodo del (*n.*° 206. *Alg.*), suppongasi, che si voglia lo sviluppo della potenza $a(x+hp)^m$, ove l'esponente m è un numero intero, e positivo. Supposto essersi quì sotto in (XXXVII), operato sopra i numeri a, h, come è stato esposto nel cit.° (*n.*° 206. *Alg.*), osserviamo nei termini, che si sono successivamente formati, primo il modo, con cui vi si contengono i numeri a, h, secondo i loro diversi coefficienti numerici; e riguardo in primo luogo agl' indicati a, h, il metodo stesso di operazione (*n.*° 206. *Alg.*) mostra che il numero a si contiene necessariamente in tutti i termini, e sempre alla potenza prima, e che l'altro h si va successivamente innalzando alle podestà 0^a, 1.^{a}, 2.^{a}, 3.^{a}, ec. fino alla *mesima* nella prima riga, alla $m-1$*esima* nella riga seconda, alla $m-2$*esima* nella terza, ec., ed alla $m-m$*esima* $= 0^a$ nella riga ultima. Dunque, prescindendo dai coefficienti numerici, i termini, che in (XXXVII) formano

l'ultima colonna verticale, dovranno essere ah^m, ah^{m-1}, ah^{m-2}, ah^{m-3}, ec. ah, a. Passando in secondo luogo alla considerazione dei coefficienti numerici, si osservi che questi nei termini della prima riga, altro, per la natura del metodo (*n.*° 206. *Alg.*), non sono, che 1, 1, 1, ec. Si osservi in seguito, che nella formazione della riga seconda non facendosi che sommare il primo termine della prima fila, cioè a, moltiplicato per h col secondo ah, poscia unire il risultato, che ne nasce, $2ah$ moltiplicato per h col termine terzo ah^2, quindi moltiplicare il risultato $3ah^2$ per h, e sommarli col termine quarto ah^3, e così in progresso; si osservi, dissi, che, così operando, si vengono nella seconda riga a formare tanti coefficienti 1, 2, 3, 4, 5, ec., i quali non sono, che i successivi numeri lineari (*n.*° 115), e però i successivi figurati di primo ordine (II. *n*° 122). Nella formazione della terza riga, poichè non si fa, che aver riguardo ai termini della riga seconda, e sommare il primo di questi, cioè a moltiplicato per h col secondo $2ah$, quindi moltiplicare il risultato $3ah$ per h e unirlo col termine terzo $3ah^2$, poscia sommare col quarto termine $4ah^3$ il risultato $6ah^2$ moltiplicato per h, e così di seguito; apparisce, che i coefficienti 1, 3, 6, 10, ec. della terza linea non sono infine, che le somme successive dei successivi numeri figurati del 1.° ordine 1, 2, 3, 4, ec.: essi dunque non sono che i numeri figurati dell' ordine 2.° (II. *n.*° 122). Nella stessa maniera i coefficienti della quarta riga nascendo dal formare le somme successive dei coefficienti della riga terza, si vede, altro essi non essere, che i numeri figurati del 3.° ordine; in egual modo si trova, che i coefficienti della riga quinta non sono che i numeri figurati dell' ordine 4.°, i figurati dell' or-

dine 5.° quelli della riga sesta, e così in progresso. Ora per la natura del metodo (*n.°* 206. *Alg.*) nella prima fila si contengono $m+1$ termini, nella fila seconda se ne contengono m, nella terza $m-1$, nella quarta $m-2$, nella quinta $m-3$, ec., cosicchè gli ultimi termini occupano il posto nella prima riga $m+1$*esimo*, nella riga seconda il posto *mesimo*, lo $m-1$*esimo*, nella riga terza, nella quarta lo $m-2$*esimo*, lo $m-3$*esimo* nella quinta, e così di seguito. Dunque supposto nella formola (XXXIII) successivamente $p=1, 2, 3, 4,$ ec. $m-1$, m, ed in corrispondenza $n=m$, $m-1$, $m-2$, $m-3$, ec. $m-(m-2)=2$, $m-(m-1)=1$, i coefficienti dei termini, che in (XXXVII) formano l' ultima colonna, dovranno essere 1, $\frac{m}{1}$, $\frac{(m-1)m}{1.2}$, $\frac{(m-2)(m-1)m}{1.2.3}$, $\frac{(m-3)(m-2)(m-1)m}{1.2.3.4}$, ec. $\frac{2.3.4...(m-1)m}{1.2.3.4...(m-1)} = \frac{m}{1}$, $\frac{1.2.3...m}{1.2.3...m}=1$, ed i termini medesimi completi saranno per conseguenza ah^m, mah^{m-1}, $\frac{m(m-1)}{2}\times ah^{m-2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}ah^{m-3}$, $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}ah^{m-4}$, ec. mah, a.

Si moltiplichino ora questi giusta il (*n.°* 206. *Algeb.*) rispettivamente pe' termini p^m, $p^{m-1}x$, $p^{m-2}x^2$, $p^{m-3}x^3$, $p^{m-4}x^4$, ec. px^{m-1}, x^m, si sommino, scrivendoli al rovescio, e poichè da ciò risulta

$$ax^m + mahpx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}ah^2p^2x^{m-2} + \text{ec.} +$$

$\frac{m(m-1)}{2} ah^{m-2} p^{m-2} x^{2} + mah^{m-1} p^{m-1} x + ah^{m} p^{m}$,

sarà questa appunto pel (III. *n.*° 203. *Alg.*) la serie, nella quale si sviluppa la data potenza $a(x+hp)^m$.

Se si fosse proposta a svilupparsi la $a(x+h)^m$; allora avendosi $p=1$, bastava moltiplicare i termini dell'ultima colonna in (XXXVII) pei rispettivi termini $1, x, x^2$, ec. x^m.

$$h \mid a,\ ah,\ ah^2,\ ah^3,\ ah^4,\ ah^5,\ \text{ec.} \ldots \quad ah^{m}$$

$$a,\ 2ah,\ 3ah^2,\ 4ah^3,\ 5ah^4,\ \text{ec.} \ldots \quad \frac{m}{1} ah^{m-1}$$

$$a,\ 3ah^2,\ 6ah^2,\ 10ah^3,\ \text{ec.}\ \frac{(m-1)m}{1 \,.\, 2} ah^{m-2}$$

$$a,\ 4ah,\ 10ah^2,\ \text{ec.}\ \frac{(m-2)\ldots m}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} ah^{m-3} \qquad \text{(XXXVII)}$$

$$a,\ 5ah,\ \text{ec.}\ \frac{(m-3)\ldots m}{1 \ldots 4} ah^{m-4}$$

$$a,\ \text{ec.}\ \frac{(m-4)\ldots m}{1 \ldots\ldots 5} ah^{m-5}$$

$$\text{ec.}$$

$$a,\ \frac{m}{1} ah.$$

II. Vogliasi lo sviluppo della somma delle due potenze $a(x+h)^m + b(x+h)^{m-1}$. Scritti perciò in (XXXVIII) in una linea orizzontale i due coefficienti a, b, ed alla loro sinistra separato con una lineetta verticale il numero h, si ponga in una se-

conda riga sotto del b il primo coefficiente a, e moltiplicato questo per h si sommi col sovrapposto b, e si scriva nella stessa riga il risultato $ah+b$. Ciò fatto, si prosegua ad operare come nel (*n.*° 206 *Alg.*), e con la continua moltiplicazione per h, si determinino, e si pongano nella seconda riga i successivi risultati ah^2+bh, ah^3+bh^2, ec. fino allo $m+1$*esimo* ah^m+bh^{m-1}. In seguito, scritto nella terza riga il primo coefficiente a sotto di $ah+b$, si operi sempre, come nel cit.° (*n.*° 206 *Alg.*) moltiplicando esso a, e tutti i successivi risultati, che ne vengono per h, e sommandoli con i sovrapposti, fino che si giunga al risultato *mesimo*. Scritto poscia nella quarta linea sotto di $2ah+b$ il solito coefficiente a, si seguiti la stessa operazione cit.° (*n.*° 206 *Alg.*) col moltiplicare per h il numero a, e tutti i risultati successivi, e col sommar questi con i risultati corrispondenti della linea terza, finchè si arrivi alla $m-1$*esima*, e lo stesso prosegua sempre a farsi, portando il coefficiente a d' una colonna sempre più alla destra, finchè giunga esso a alla colonna ultima. Ciò fatto, per poca riflession, che si faccia, vedesi, che la prima parte della colonna ultima deve, per la natura della operazion praticata essere composta di quegli stessi termini, de' quali è composta l' ultima colonna in (XXXVII): i termini poi, chè formano la parte seconda della medesima colonna ultima (XXXVIII) vengono determinati come quei della parte prima, ma cominciando il corrispondente coefficiente b ad esistere una colonna più a destra di quello, che esista a, è chiaro, che tanto gli esponenti, come i fattori dei numeratori ne' coefficienti numerici dell' indicata parte seconda dell' ultima colonna dovranno essere inferiori di un' unità di quello che siano i rispettivi esponenti e fattori nella parte prima. Dunque i termini di questa parte seconda essen-

do bh^{m-1}, $(m-1)bh^{m-2}$, $\frac{(m-1)(m-2)}{2}bh^{m-3}$, ec. $(m-1)bh$, b, col moltiplicarli rispettivamente per 1, x, x^2, x^3, ec. x^{m-2}, x^{m-1}, e col sommarli insieme, otterremo una serie, la quale altro non è, che la proveniente dallo sviluppo della potenza $b(x+h)^{m-1}$; ma moltiplicando i termini della parte prima rispettivamente per 1, x, x^2, x^3, ec., x^{m-1}, x^m, si ha la serie, in cui si sviluppa la $a(x+h)^m$ (*prec.* I). Dunque col moltiplicare i termini tutti dell' ultima colonna (XXXVIII) i due della prima linea per 1 i due della linea seconda per x, i due della terza per x^2, quei della quarta per x^3, e così di seguito fino a moltiplicare i due termini della riga penultima per x^{m-1}, ed il solo della riga ultima per x^m, si otterrà come è stato richiesto lo sviluppo della somma

$a(x+h)^m + b(x+h)^{m-1}$.

$$h \mid a,\ b$$

$$a,\ (ah+b),\ (ah^2+bh),\ (ah^3+bh^2),\ (ah^4+bh^3),\ \text{ec.}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \left(ah^m + bh^{m-1}\right)$$

$$a,\quad (2ah+b),\ (3ah^2+2bh),\ (4ah^3+3bh^2)\ \text{ec.}$$

$$\ldots\ldots\ldots \left(\frac{m}{1}ah^{m-1} + \frac{(m-1)}{1}bh^{m-2}\right) \quad \text{(XXXVIII)}$$

$$a,\quad (3ah+b),\ (6ah^2+3bh)\ \text{ec.}$$

$$\ldots \left(\frac{(m-1)m}{1\cdot 2}ah^{m-2} \text{ ec.} + \frac{(m-2)(m-1)}{1\cdot 2}bh^{m-3}\right)$$

$$a,\ (mah+b)$$

$$a$$

ec.

III. Si cerca di sviluppare la somma $a(x+h)^{m} + (x+h)^{m-1} + c(x+h)^{m-2}$. Pongansi a tal fine in (XXXIX) in una linea orizzontale i tre coefficienti a, b, c, ed alla loro sinistra disgiunto con una stanghetta verticale il numero h. Scritto in seguito a sotto di b, si moltiplichi esso a per h, e come nel (*prec.* II) si sommi il prodotto ah col sovrapposto b; scritto il risultato $ah+b$ sotto di c, si sommi con lo stesso c il prodotto di $ah+b$ per h, e posto alla destra il risultato ah^2+bh+c, si prosegua, come di sopra, a determinare moltiplicando sempre per h, ed a scrivere successivamente nella stessa linea seconda tutti i risultati, che ne vengono, fino allo $m+1$*esimo*. Nella maniera medesima del (*n.*° 206 *Alg.*), e dei (*prec.* I, II) si determinino i termini di tutte le altre righe; e dopo ciò è facile a vedersi, che l' ultima colonna è necessariamente composta di tre parti, la prima, e la seconda delle quali non sono evidentemente, che la prima, e la seconda dell' ultima colonna del (XXXVIII); la terza parte poi venendo determinata come le altre, e cominciando in ciascuna fila a nascere dipendentemente dal coefficiente c, e però nel terzo risultato, dovrà negli esponenti del numero h, e nei fattori dei dividendi nei coefficienti numerici contenere due unità di meno, di quello, che si contengono nella parte prima; ed essa terza parte per conseguenza sarà formata dai termini ch^{m-2}, $(m-2)\,ch^{m-3}$, $\frac{(m-2)(m-3)}{2}\,ch^{m-4}$, ec. Col moltiplicare adunque i termini tutti dell' ultima colonna (XXXIX), i tre della prima riga per 1, i tre della riga seconda per x, quei della terza per x^2, quei della quarta per x^3, e così in progresso fino a moltiplicare i tre termini della fila antepenultima per x^{m-2}, i due

della penultima per x^{m-1}, ed il solo dell' ultima per x^{m}, risulterà per tal modo evidentemente la serie, nella quale si evolve la data somma

$$(x+h)^{m} + b\,(x+h)^{m-1} + c\,(x+h)^{m-2}$$

$$h \mid a,\ b\ c$$

$$a,\ (ah+b),\ (ah^{2}+bh+c),\ (ah^{3}+bh+ch),\ \text{ec.}$$

$$\left(ah^{m}+bh^{m-1}+ch^{m-2}\right)$$

$$a,\ (2ah+\ h\quad),\ (3ah^{2}+2bh+c),\ \text{ec.}$$

$$\left(\frac{m}{1}ah^{m-1}+\frac{m-1}{1}bh^{m-2}+\frac{m-2}{1}ch^{m-3}\right) \qquad \text{(XXXIX)}$$

$$\text{ec.}$$

$$a,\ \text{ec.}\left(\frac{(m-1)m}{1\,.\,2}ah^{2}+\frac{m-1}{1}\,bh+c\right)$$

$$a,\ \left(\frac{m}{1}\,ah+b\right)$$

$$a$$

IV. Che se la somma data a svilupparsi sia composta di quattro, cinque ec. potenze successive, cioè se sia la $a(x+h)^{m} + b(x+h)^{m-1} + c\,(x+h)^{m-2} + d(x+h)^{m-3}$, oppure la $a(x+h)^{m} + b(x+h)^{m-1} +$ ec. $+ e\,(x+h)^{m-4}$, ec.; otterremo la serie richiesta, operando sempre come precedentemente, e come nel (*n.*° 206 *Alg.*), avvertendo però di porre nella prima linea orizzontale, come nei (*prec.* II, III), e come nel (*n.*° 92) tutti i coefficienti supposti a, b, c, d, ec., e avvertendo, nel formare la li-

nea seconda, di sommare ciascun risultato, che si ottiene successivamente, con il coefficiente sovrapposto, finchè tali coefficienti siano esauriti affatto. Operando in simile guisa è chiaro che l'ultima colonna sarà formata di tante parti quante sono le successive potenze supposte; che le prime tre di queste parti sono quelle stesse tre, che formano la colonna ultima in (XXXIX); che la parte quarta, mentre è della forma medesima delle precedenti, contiene poi negli esponenti di h, e nei fattori dei numeratori nei coefficienti numerici tre unità di meno, di quello che si contengano negli esponenti, e nei fattori della parte prima; che la parte quinta, avendo anch' essa la stessa forma, contiene negl' indicati esponenti e fattori quattro unità di meno di quello che nella parte prima, e così di seguito; e tutto ciò perchè mentre l' operazione sopra tutti i termini è sempre la medesima, il coefficiente d poi appartenente alla potenza $d(x+h)^{m-3}$ non comincia in ciascuna riga a mettersi in campo, che nel risultato quarto, il coefficiente e appartenente alla $e(x+h)^{m-4}$ non comincia in ciascuna fila ad apparire, che nel risultato quinto, e così in progresso. Dunque i termini, che costituiscono la quarta parte dell' ultima colonna essendo

$$dh^{m-3},\ (m-3)\,dh^{m-4},\ \frac{(m-3)(m-4)}{2}\,dh^{m-5},\text{ec.}$$

quelli, che formano la parte quinta essendo

$$eh^{m-4},\ (m-4)\,eh^{m-5},\ \frac{(m-4)(m-5)}{2}\,eh^{m-6},\ \text{ec.};$$

ne segue, che moltiplicando i termini dell' ultima colonna, quelli della prima fila per 1, quelli della fila seconda per x, quelli della terza per x^2, ec., otterremo un risultato totale, il quale non sarà, che la serie, in cui si sviluppa la somma delle date potenze.

Perciò se la somma data a svilupparsi sia la

$$a(x+h)^{m} + b(x+h)^{m-1} + c(x+h)^{m-2} + \text{ec.} \quad \text{(XL)}$$
$$+ s(x+h)^2 + t(x+h) + u\,;$$

da quanto si è detto nei (*prec.*ⁱ I, II, III. IV) apparisce, che la serie richiesta sarà

$$(ah^{m} + bh^{m-1} + ch^{m-2} + \text{ec.} \ldots$$
$$\ldots + sh^2 + th + u)\,1 \ldots\ldots$$
$$+(mah^{m-1} + (m-1)bh^{m-2} + (m-2)ch^{m-3} + \text{ec.} \ldots$$
$$\ldots + 2sh + t)\,x \ldots\ldots$$
$$+\Big(\frac{m(m-1)}{2}ah^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}bh^{m-3} + \ldots \quad \text{(XLI)}$$
$$+\frac{(m-2)(m-3)}{2}ch^{m-4} + \text{ec.} + s\Big)x^2 \ldots\ldots$$
$$+\Big(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}ah^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}bh^{m-4}$$
$$+\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3}ch^{m-5} + \text{ec.}\Big)x^3$$

ec.

124. *Probl.* 17.° Dato il Polinomio

$$Z = az^{m} + bz^{m-1} + cz^{m-2} + \text{ec.} + sz^2 + tz + u\,, \ldots, \quad \text{(XLII)}$$

nel quale l'esponente m sia intero, e positivo, trovare con metodo spedito, ciocchè esso Z diviene, allorchè si pone $z = x + h$.

Sol. Poichè si vuole $z = x + h$, è chiaro, che si sarà sciolto il Problema, mentre con metodo spedito venga determinata la serie, nella quale si evolve la funzione (XL). Ora o si vuole, che tutti i numeri a, b, c, ec. h siano determinati, e razionali, o non si vuole.

I. Abbia luogo la seconda di queste ipotesi. In simile caso, siccome i coefficienti a, b, c, ec.,

ed il numero h sono in tutto, o in parte quantità algebraiche, dovranno nel risultato, che si cerca, i coefficienti delle varie potenze della x essere formati di varii termini necessariamente tra loro disgiunti: in conseguenza di ciò si scioglierà nel caso supposto il Problema; mentre si determinino speditamente i termini accennati. Ora dal modo, con cui si è ottenuto il risultato (XLI) (I, ec. IV. $n.^o$ 123), e dalla forma, che quindi ha esso acquistata, apparisce, che i termini, i quali formano in (XLI) la prima riga orizzontale, si ricavano agevolmente, e immediatamente dal valore della Z, mentre si scriva invece dell' incognita z il numero h; che la riga seconda ritraesi dalla prima, col moltiplicare ciascun suo termine pel rispettivo esponente della h, col diminuire l' esponente medesimo della h di un' unità, e col moltiplicare tutto per x; che dalla seconda si ottiene la riga terza, moltiplicando ciaschedun termine di quella per l' esponente della h, diminuendo ciascun esponente di un' unità, dividendo ciascun coefficiente per 2, e moltiplicando tutto per x; che si ricava la riga quarta dalla terza col moltiplicare ogni termine di questa pel rispettivo esponente della h, con lo scemare ciascun esponente di 1, col dividere ciascun coefficiente per 3, e col moltiplicare tutto per x; e in generale, che una riga qualunque *pesima* si ottiene dalla precedente *$p-1$esima*, mentre si moltiplichi ciascun termine di questa pel rispettivo esponente della h, si diminuisca ciaschedun esponente della h di un' unità, si divida ogni coefficiente per $p-1$, e si moltiplichi tutto per x. Dunque essendo l' operazione ora accennata assai semplice, ed altro il risultato (XLI), che ne viene, non essendo, che la serie, in cui si sviluppa la funzione (XL); ne segue, che coll' eseguire simile operazione, otterremo in questo primo caso, quanto richiede il Problema, cioè otterremo col

me-

metodo spedito ciocchè diventa la Z, mentre invece della z si sostituisca $x+h$. Si voglia per esempio determinare speditamente ciocchè diviene la $Z = z^5 - 9z^4 + 3z^3 + 7z^2 - 10z - 15$, allorchè si pone $z = x + h$: eseguita qui sotto l'operazione precedente, troveremo risultare

$$Z = \begin{cases} (\ h^5 - 9h^4 + 3h^3 + 7h^2 - 10h - 15) + \\ (\ 5h^4 - 36h^3 + 9h^2 + 14h - 10)x + \\ (10h^3 - 54h^2 + 9h + 7)x^2 + \\ (10h^2 - 36h + 3)x^3 + \\ (\ 5h - 9)x^4 + \\ x^5 \,. \end{cases}$$

II. Siano i numeri a, b, c, d, ec. h tutti determinati, e razionali, e siano inoltre interi. Operando come nel (*prec.* I), potrebbesi anche in questo caso sciorre il Problema; ma per la supposta determinazione, e razionalità de' numeri $a, b, c, d,$ ec. h dovendosi nel risultato ultimo, che si domanda, ridurre i termini, che in (XLI) formano ciascuno dei coefficienti delle quantità $1, x, x^2, x^3$, ec. ad un termine solo; l'operazione riescirà sommamente più semplice, se invece di servirci del metodo del (*prec.* I), determineremo i citati coefficienti del risultato (XLI) col metodo esposto nei (I, ec. IV. *n.*° 123), eseguendo in esso attualmente le accennate successive moltiplicazioni, ed addizioni. Gli esempj seguenti rischiareranno di più la cosa. Abbiansi a cagion d'esempio i due polinomj $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 10z - 15$, $2z^5 - 14z^3 - 7$, e si voglia, rapporto al primo $z = r - 3$, e rapporto al secondo $z = x + 5$. Eseguisco qui sotto (XLIII) l'operazione indicata nel (IV. *n.*° 123), avvertendo di considerare il Polinomio $2z^5 - 14z^3 - 7$ come fornito di tutti i suoi termini, ossia della forma $2z^5 + 0z^4 - 14z^3 + 0z^2 + 0z - 7$, e quindi di porre tanti zeri corrispondentemente a tutti i termini mancanti; avvertenza, la quale è necessario di ave-

re in tutti i casi, ne' quali il Polinomio dato è privo di uno o più termini. Raccolti poscia i numeri delle ultime due colonne, i risultati richiesti saranno

$$x^4-17x^3+105x^2-289x+285,$$

$$2x^5+50x^4+486x^3+2290x^2+5200x+4493.$$

	−3|1, −5, 6, −10, −15	5|2, 0, −14, 0, 0, −7
	1, −8, 30, −100, 285	2, 10, 36, 180, 900, 4493
	1, −11, 63, −289	2, 20, 136, 860, 5200
(LXIII)	1, −14, 105	2, 30, 286, 2290
	1, −17	2, 40, 486
	1	2, 50
		2

III. Ritenuti i coefficienti a, b, c, d, ec. interi, sia h una frazione razionale. I metodi dei (*prec.*[i] I, II) serviranno eziandio nel caso presente alla soluzione del nostro Problema: ma la briga di ridurre poscia alla stessa denominazione, e di sommare insieme i termini fratti, che si producono nelle successive determinazioni, fa sì che tornerà assai meglio il far precedere ai citati metodi dei (*prec.*[i] I, II) la seguente semplicissima operazione.

Supposto $h=\frac{g}{i}$, si scrivano in (XLIV) in una linea orizzontale tutte le successive potenze 1, i, i^2, i^3, ec. i^{m-2}, i^{m-1}, i^m, e sotto di loro rispettivamente gli $m+1$ coefficienti a, b, c, d, ec.

s, t, u, ponendo lo zero, ove mancasse qualche termine della Z (*prec.* II); si moltiplichino quindi le citate potenze della i pei rispettivi coefficienti, si scrivano al disotto in una linea orizzontale i prodotti, e con questi prodotti a, bi, ci^2, di^3, ec. considerati come coefficienti della Z, e col solo numeratore g della frazione si operi come si è fatto con i coefficienti a, b, c, d, ec., e con h nei (*prec.*[i] I, II). Dopo ciò si moltiplichino le quantità, che giusta i citati (*prec.*[i] I, II) ci risultano, quella della prima riga per $\frac{1}{i^m}$, quella della riga seconda per $\frac{x}{i^{m-1}}$, quella della terza per $\frac{x^2}{i^{m-2}}$, l' altra della quarta per $\frac{x^3}{i^{m-3}}$, e così di seguito fino a moltiplicare la penultima per $\frac{x^{m-1}}{i}$, e l'ultima per x^m; e sommati poscia tutti i prodotti, il risultato, che ne viene sarà la funzione domandata.

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & i, & i^2, & i^3, & \text{ec.} & i^{m-2}, & i^{m-1}, & i^m \\ a, & b, & c, & d, & \text{ec.} & s, & t, & u \\ \hline a, & bi, & ci^2, & di^3, & \text{ec.} & si^{m-2} & ti^{m-1}, & ui^m \end{array} \quad \text{(XLIV)}$$

Posto per esempio $Z=z^5-6z^4+8z^3-4z^2+10z-20$, si voglia $h=\frac{g}{i}=\frac{5}{3}$. Operando quì sotto nella maniera ora indicata, e giusta il (*prec.* II), perchè la frazione, e tutti i coefficienti sono determinati, otterremo per la funzione richiesta

$$x^5+\frac{7}{3}x^4-\frac{38}{9}x^3-\frac{478}{27}x^2-\frac{745}{81}x-\frac{2635}{243}$$

	1,	3,	9,	27,	81,	243	
	1,	−6,	8,	−4,	10,	−20	
5	1,	−18,	72,	−108,	810,	−4860	
		1,	−13,	7,	−73,	445,	−2635
			1,	−8,	−33,	−238,	−745
				1,	−3,	−48,	−478
					1,	2,	−38
						1,	7
							1

Se, posto $Z = 7z^3 - 5z^2 + 10z - 15$, Si vuole la frazione $\frac{g}{i}$ indeterminata; trovate allora, come in (XLIV) le quantità $7, -5i, 10i^2, -15i^3$, formo la funzione $7z^3 - 5iz^2 + 10i^2z - 15i^3$, e formo più semplicemente la funzione medesima, col moltiplicare il primo termine della Z per 1, il secondo per i, il terzo per i^2 ec.; e operando in seguito sopra questa funzione ottenuta secondo il (*prec.* I), e come è stato ora accennato, avremo pel richiesto risultato

$$(7g^3 - 5ig^2 + 10i^2g - 15i^3) \times \frac{1}{i^3}$$
$$+ (21g^2 - 10ig + 10i^2) \frac{x}{i^2}$$
$$+ (21g - 5i) \frac{x^2}{i}$$
$$+ 7x^3$$

Per riconoscere la ragione della presente operazione, si ponga in (XLI) $\frac{g}{i}$ in luogo di h, e

si riducano allo stesso denominatore tutti i termini di ciascheduna riga, risulterà da ciò

$$\left(ag^{m} + big^{m-1} + ci^{2}g^{m-2} + \text{ec.} + si^{m-2}g^{2} + ti^{m-1}g + ui^{m}\right) \times \frac{1}{i^{m}}$$

$$+\left(mag^{m-1} + (m-1)big^{m-2} + (m-2)ci^{2}g^{m-3} + \text{ec.} + 2si^{m-2}g + ti^{m-1}\right)\frac{x}{i^{m-1}}$$

$$+\left(\frac{m(m-1)}{2}ag^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}big^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2}cig^{m-4} + \text{ec.} + si^{m-2} + \text{ec.}\right)\frac{x^{2}}{i^{m-2}} \quad \text{(XLV)}$$

$$+\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}ag^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3}big^{m-4} + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2\,.\,3}cig^{m-5} + \text{ec.}\right)\frac{x^{3}}{i^{m-3}}$$

ec.

Ora se la data funzione (XLII) invece de' coefficienti a, b, c, ec. s, t, u, contenesse gli altri a, bi, ci^{2}, ec. si^{m-2}, ti^{m-1}, ui^{m}, e se invece di h si ponesse il numero g; eseguendo le operazioni de' (*prec.*ⁱ I., II), risultano evidentemente da prima le quantità, che in (XLV) esistono tra le parentesi, e in seguito moltiplicando queste rispettivamente per $\frac{x}{i^{m-1}}$, $\frac{x^{2}}{i^{m-2}}$, ec., e sommandole si ottiene appunto tutta la stessa funzione (XLV); dunque tale funzione pel modo con cui si è determinata, altro non essendo, che ciò che di-

$1, \quad 3, \quad 9, \quad 27, \quad 81, \quad 243$

$1, \quad -6, \quad 8, \quad -4, \quad 10, \quad -20$

$$\begin{array}{l|llllll}
5 & 1, & -18, & 72, & -108, & 810, & -4860 \\
 & & 1, & -13, & 7, & -73, & 445, \quad -2635 \\
 & & & 1, & -8, & -33, & -233, \quad -745 \\
 & & & & 1, & -3, & -48, \quad -478 \\
 & & & & & 1, & 2, \quad -38 \\
 & & & & & & 1, \quad 7 \\
 & & & & & & \quad\quad 1
\end{array}$$

Se, posto $Z=7z^3-5z^2+10z-15$, Si vuole la frazione $\frac{g}{i}$ indeterminata; trovate allora, come in (XLIV) le quantità $7, -5i, 10i^2, -15i^3$, formo la funzione $7z^3-5iz^2+10i^2z-15i^3$, e formo più semplicemente la funzione medesima, col moltiplicare il primo termine della Z per 1, il secondo per i, il terzo per i^2 ec.; e operando in seguito sopra questa funzione ottenuta secondo il (*prec.* I), e come è stato ora accennato, avremo pel richiesto risultato

$$(7g^3-5ig^2+10i^2g-15i^3)\times\frac{1}{i^3}$$
$$+(21g^2-10ig+10i^2)\frac{x}{i^2}$$
$$+(21g-5i)\frac{x^2}{i}$$
$$+7x^3$$

Per riconoscere la ragione della presente operazione, si ponga in (XLI) $\frac{g}{i}$ in luogo di h, e

si riducano allo stesso denominatore tutti i termini di ciascheduna riga, risulterà da ciò

$$\left(ag^{m}+big^{m-1}+ci^{2}g^{m-2}+\text{ec.}+si^{m-2}g^{2}+ti^{m-1}g+ui^{m}\right)\times\frac{1}{i^{m}}$$

$$+\left(mag^{m-1}+(m-1)big^{m-2}+(m-2)ci^{2}g^{m-3}+\text{ec.}+2si^{m-2}g+ti^{m-1}\right)\frac{x}{i^{m-1}}$$

$$+\left(\frac{m(m-1)}{2}ag^{m-2}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}big^{m-3}+\frac{(m-2)(m-3)}{2}cig^{m-4}+\text{ec.}+si^{m-2}+\text{ec.}\right)\frac{x^{2}}{i^{m-2}} \qquad \text{(XLV)}$$

$$+\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}ag^{m-3}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3}big^{m-4}+\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2\,.\,3}cig^{m-5}+\text{ec.}\right)\frac{x^{3}}{i^{m-3}}$$

ec.

Ora se la data funzione (XLII) invece de' coefficienti a, b, c, ec. s, t, u, contenesse gli altri a, bi, ci^2, ec. si^{m-2}, ti^{m-1}, ui^m, e se invece di h si ponesse il numero g; eseguendo le operazioni de' (*prec.*[i] I., II), risultano evidentemente da prima le quantità, che in (XLV) esistono tra le parentesi, e in seguito moltiplicando queste rispettivamente per $\frac{x}{i^{m-1}}$, $\frac{x^2}{i^{m-2}}$, ec., e sommandole si ottiene appunto tutta la stessa funzione (XLV); dunque tale funzione pel modo con cui si è determinata, altro non essendo, che ciò che di-

viene la (XLII), allorchè si pone $z = x + \frac{g}{i}$, ne segue, che ec.

Se fossero frazioni ancora alcuni, o tutti i coefficienti a, b, c, d, ec.: allora converrebbe ridurre da prima simili coefficienti allo stesso denominatore, e poi operare come precedentemente, prescindendo dal divisore comune, che poi si pone in ultimo.

125. *Scol.* 14.° I. Dalla prima linea del risultato (XLI) apparisce, che l'ultimo dei valori, i quali col metodo del (II. *n.*° 124) si ottengono, altro non è se non se ciò, che diventa la (XLII), allorchè alla z si dà un determinato valore h; e quindi si vede una ragione del metodo usato a risolvere il Problema del (*n.* 252. *Alg.*) più generale della ragione addotta in quel luogo.

II. Se nella frazione $\frac{g}{i}$ del (III. *n.*° 124) il denominatore i sia una potenza esatta, e positiva del 10; allora potremo o ridurre la frazione a forma decimale, e servirci per la soluzione del solito Problema (*n.*° 124) soltanto del (II. *n.*° 124), oppure supposto $i = 10^q$, si potranno aggiungere q zeri alla destra del coefficiente b, $2q$ zeri alla diritta di c, $3q$ zeri alla destra di d, e così di seguito, venendo così, giusta il (III. *n.*° 124) a moltiplicarsi b per $10^q = i$, c per $10^{2q} = i^2$, d per $10^{3q} = i^3$, ec.; e poscia proseguire il calcolo come nel citato (III. *n.*° 124).

III. Se mai si voglia $z = \frac{x+g}{i}$; allora otterremo ciocchè diviene in corrispondenza la (XLII), mentre nel risultato (XLV) ottenuto secondo il

(III. *n.*° 124), ciascuna potenza 1, x, x^2, x^3, ec. della x si divida per la stessa potenza i^m.

126. *Teor.* 6.° Supposto $a=1$, $b=m$, $c=\frac{m(m-1)}{2}$, $d=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$, ec. $r=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$, $s=\frac{m(m-1)}{2}$, $t=m$, $u=1$, e sostituiti questi valori nella (XLV), io dico, che, prescindendo dai fattori

$\frac{1}{i^m}$, $\frac{x}{i^{m-1}}$, $\frac{x^2}{i^{m-2}}$, ec. la prima riga dell' indicata funzione diverrà $=(g+i)^m$, la seconda riga $=m(g+i)^{m-1}$, la terza $=\frac{m(m-1)}{2}(g+i)^{m-2}$, la quarta $=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}(g+i)^{m-3}$, e così di seguito.

Dim. Rapporto alla prima riga è facile a vedersi la verità di quanto abbiamo asserito: imperciocchè per l' indicata sostituzione essa riga diviene

$$g^m+mig^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}i^2g^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}i^3g^{m-3}+\text{ec.} \quad \text{(XLVI)}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}i^{m-3}g^3+\frac{m(m-1)}{2}i^{m-2}g^2+mi^{m-1}g+i^m,$$

ed è questa la serie appunto in cui si sviluppa la potenza $(g+i)^m$ (III. *n.*° 103 *Alg.*).

Riguardo poi alla linea seconda osservo nascere essa col moltiplicare ciascun termine della prima pel rispettivo esponente della g, e col diminuire tale esponente di un' unità (I. *n.*° 124). Dunque nel nostro caso la seconda riga diventerà

$$mg^{m-1} + m(m-1)\,ig^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2}\,i^{2}g^{m-3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3}\,i^{3}g^{m-4} + \text{ec.} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}\,3i^{m-3}g^{2}$$

(XLVII) $+ \frac{m(m-1)}{2}\,2i^{m-2}g + mi^{m-1}$; ma questo risultato è

$$= m\Big(g^{m-1} + (m-1)\,ig^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\,i^{2}g^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3}\,i^{3}g^{m-4} + \text{ec.} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\,i^{m-3}g^{2}$$

$$+ (m-1)\,i^{m-2}g + i^{m-1}\Big) = m\,(g+i)^{m-1}.$$ Dunque ec.

Prima di procedere innanzi si rifletta, che mentre il risultato (XLVI) è $=(g+i)^{m}$, essendo l'altro (XLVII.) $= m\,(g+i)^{m-1} = (g+i)^{m} \times \frac{m}{g+i}$, la sovraesposta operazione, quella cioè di moltiplicare ciascun termine della funzione (XLVI) per l'esponente della g, e di diminuire questo esponente di 1 equivale al dividere la quantità $(g+i)^{m}$ per $g+i$, ed a moltiplicarla per l'esponente m, e ciò qualunque sia il numero m, purchè intero, e positivo. Aggiungasi poi, che se tutti i termini della (XLVI) fossero moltiplicati per una quantità stessa M risulterebbero moltiplicati per M anche tutti i termini della (XLVII), e però dalla M $(g+i)^{m}$ si dedurebbe la m M $(g+i)^{m-1}$.

Ora come nella funzione (XLV) dalla prima nasce la seconda riga, così dalla seconda si produ-

ce la riga terza, dalla terza la quarta, dalla quarta la quinta, e così in progresso, purchè tutti i termini della terza si dividano per 2, tutti quelli della quarta per 3, tutti quelli della quinta per 4, ec. (I. n.° 124). Dunque in conseguenza delle riflessioni poc' anzi fatte, la terza riga della funzione (XLV) per la nostra supposizione diverrà

$$= \frac{m(m-1)}{2}(g+i)^{m-1}, \text{ la riga quarta,}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}(g+i)^{m-3} \text{ la quinta}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}(g+i)^{m-4},$$

e così di seguito. Dunque, ec.

127. *Cor.* Nel caso, in cui g, i siano numeri interi, ed m intero, e positivo, le righe della funzione (XLV), prescindendo dai fattori $\frac{1}{i^m}$, $\frac{x}{i^{m-1}}$, $\frac{x^2}{i^{m-2}}$, ec., altro non sono, che i valori, i quali si ottengono nell' ultima colonna verticale in conseguenza della operazione esposta nei (II, III. $n.°$ 124). Dunque allorquando le successive potenze 1, i, i^2, ec. i^m vengono rispettivamente moltiplicate pei numeri 1, m, $\frac{m(m-1)}{2}$, ec. 1, e si eseguisca poscia con il numero g, e i prodotti ottenuti, la indicata operazione dei (II. III. $n.°$ 124), i valori dell'ultima colonna verticale altro non saranno che le quantità $(g+i)^m$, $m(g+i)^{m-1}$ $\frac{m(m-1)}{2}(g+i)^{m-2}$, ec. ($n.°$ *prec.*). Ecco ciò da cui dipende evidentemente la dimostrazione di quanto è stato asserito, e non dimostrato nel (V. $n.°$ 269. *Alg.*). (*a*)

(*a*) Nella soluzione in numeri interi, e positivi della Equazione $7x + 5y + 8z + 4u = 39$ esposta ad esempio nel

128. *Def.* 14.° Se una serie ha i suoi termini in continua (*n.*° 204. *Alg.*) progressione geometrica, tali cioè, che, come il primo sta geometricamente al secondo, così il secondo stia al terzo, ed il terzo al quarto, ec.: Essa si chiama *Serie*, o *Progressione geometrica*. Tale per esempio è la seguente

3, 12, 48, 192, 768, 3072, ec.

129. *Scol.* 15.° Sia a il primo termine della serie, ed m l' esponente della ragione geometrica (*n.*° 118. *Alg.*) tra il primo, ed il secondo termine della serie medesima. Essa sarà evidentemente

(XLVIII) $a, am, am^2, am^3, am^4, am^5$, ec. am^{n-1}

esprimendosi al solito per n il numero dei termini, onde $T_n = am^{n-1}$. Nell' esempio del (*n.*° *prec.*) si ha $n=3$, $m=4$, e $T_n = 3.4^{n-1}$.

130. *Prob.* 18.° Determinare la somma generale di una serie geometrica, di cui il termine generale sia am^{n-1} (*n.*° *prec.*).

Sol. Poichè a è il primo termine della serie supposta, ed am^{n-1} l' ultimo (XLVIII), e poichè, mentre si abbiano più ragioni geometriche uguali fra loro, la somma degli antecedenti deve stare alla somma dei conseguenti, come un solo anteceden-

(*n.*° 159. *Alg.*), è sfuggito per mancanza di osservazione un terzo caso diverso dai due colà accennati, nel quale la data Equazione può risolversi, come è stato richiesto. Mentre colà si faccia $r = 11$, risultando $t < 11\frac{1}{2}$, $t > 14\frac{1}{2}$, e dovendo d' altronde il valore di t essere divisibile esattamente per 4, potrà in corrispondenza avere il valore 12, e da ciò risulterà per la terza soluzione $x=1$, $y=4$, $z=1$, $u=1$.

te al suo conseguente (VIII $n.°$ 137. *Alg.*), ne verrà $S - am^{n-1} : S - a :: 1 : m$, e per conseguenza $S = \frac{a(m^n - 1)}{m - 1} = \frac{a(1 - m^n)}{1 - m}$. Nella serie del precedente esempio ($n.°$ 128) avremo $S = 4^n - 1$, e se $n = 6$, avremo $S = 4^{6}{}^{9} - 1 = 4095$.

131. *Scol.* 16.° I. Data viceversa la somma generale di una serie geometrica, potremo agevolmente averne il termine generale (II. $n.°$ 81).

II. Se nella serie (XLVIII) si voglia il numero a negativo; allora saranno negativi tutti i termini, risultando in corrispondenza $T = -am^{n-1}$, ed $S = -\frac{a(1-m^n)}{1-m}$. Che se si voglia negativo l' esponente m della ragione geometrica; allora i termini della serie si alterneranno nel segno, e si avrà $T = a(-m)^{n-1}$, $S = \frac{a(1-(-m)^n)}{1+m}$.

III. Suppongasi n numero pari, e si moltiplichino insieme le due somme $\frac{a(1-m^n)}{1-m}$, $\frac{a(1+m^n)}{1+m}$; ne verrà il prodotto $\frac{a^2(1-m^{2n})}{1-m^2}$. Ora questo ultimo risultato non è che la somma della serie a^2, a^2m^2, a^2m^4, a^2m^6, ec. ($n.°$ 130). Dunque allorchè la somma di un numero pari de' termini della serie a, am, am^2, am^3, ec. si moltiplica per la somma di un numero uguale di termini corrispondenti della a, $-am$, am^2, $-am^3$, ec.; il prodotto che se ne ottiene, altro non è che la somma de' quadrati de' termini supposti in ciascuna delle due serie.

IV. Elevando ciascun termine della serie (XLVIII) ad una stessa potenza, per esempio q; la serie a^q, a^qm^q, a^qm^{2q}, a^qm^{3q}, ec.,

che ne nasce, sarà essa pure geometrica, ed $am^{q} {}^{q(n-1)}$, $a^{q}\frac{(1-m^{qn})}{1-m^{q}}$ ne saranno il termine, e la somma generale.

Col porre nella formola (IV) (*n.°* 83) invece dei termini T_n, T_{n+1}, ec. i valori am^{n-1}, am^{n}, ec. poichè risulta

$$D^{(p)} = a(m^{p+n-1} - pm^{p+n-2} + \frac{p(p-1)}{2} m^{p+n-3} - \text{ec.} \mp pm^{n} \pm m^{n-1}) = am^{n-1}(m-1)^{p},$$

avremo così una formola assai semplice, da cui si possono dedurre tutte le differenze della serie (XLVIII), differenze, delle quali niuna potrà evidentemente essere, come nel (*n.°* 96), costante.

VI. Formando dalla (XLVIII) una serie interrotta (*n.°* 109) per p termine, cioè la a, am^{p+1}, am^{2p+2}, am^{3p+3}, am^{4p+4}, ec., ossia supposto $m^{p+1} = M$, la

$$a,\ aM,\ aM^{2},\ aM^{3},\ aM^{4},\ \text{ec.,} \qquad \text{(XLIX)}$$

la serie risultata sarà anch'essa geometrica, ed il suo termine, e la sua somma generale saranno

$$aM^{N-1} = am^{(p+1)(N-1)},\quad \frac{a(1-M^{N})}{1-M} = \frac{a(1-m^{(p+1)N})}{1-m^{p+1}}.$$

VII. Potremo agevolmente interpolare (*n.°* 113) p termini a due consecutivi di una data serie geometrica. Supposto difatti, che la (XLIX) sia la serie data, basterà pel (*prec.* VI) prendere un numero $m = \sqrt[p+1]{M}$, e servirci di questo, come di

esponente della costante ragione geometrica. La serie interpolata sarà nel nostro caso la

$$a,\ a\sqrt[p+1]{M},\ a\sqrt[p+1]{M^2},\ a\sqrt[p+1]{M^3},\ \text{ec.}\ a\sqrt[p+1]{M^p},\ aM,\ \text{ec.}$$

VIII. Suppongasi nella serie truovata nel ($n.^\circ$78) $b=1$, $x=-mz$; sostituendo ne verrà

$$\frac{a}{1-mz}=a+amz+am^2z^2+am^3z^3+\text{ec.}+am^{n-1}z^{n-1}$$

$+\frac{am^n z^n}{1-mz}$. Dunque $\frac{a}{1-mz}$ è la funzione dal cui sviluppo dipende la serie (XLVIII) ($n.^\circ$ 77). Se sia $m=\frac{1}{k}$, risultando $\frac{ak}{k-z}=a+\frac{a}{k}z+\frac{a}{k^2}z^2+\frac{a}{k^3}z^3+\text{ec.}$ $+\frac{a}{k^{n-1}}z^{n-1}+\frac{az^n}{k^{n-1}(k-z)}$, col dividere tutto per k, e porre $z=1$, otteremo $\frac{a}{k-1}=+\frac{a}{k}+\frac{a}{k^2}+\frac{a}{k^3}+\frac{a}{k^4}$ $+\text{ ec. }+\frac{a}{k^n}+\frac{a}{k^n(k-1)}$. Dunque $\frac{a}{k-1}$ è la funzione, dalla quale, effettuando attualmente la divisione indicata ($n.^\circ$ 78), si sviluppa la serie $\frac{a}{k}$, $\frac{a}{k^2}$, $\frac{a}{k^3}$, $\frac{a}{k^4}$, ec. Ora qualunque decimale periodico è della forma

$$\frac{A}{10^p}+\frac{a}{10^{p+q}}+\frac{a}{10^{p+2q}}+\frac{a}{10^{p+3q}}+\frac{a}{10^{p+4q}}+\text{ec.}=$$

$$\frac{1}{10^p}\left(A+\frac{a}{10^q}+\frac{a}{10^{2q}}+\frac{a}{10^{3q}}+\frac{a}{10^{4q}}+\text{ec.}\right),$$ contenendosi nell' intero a q ciffre, e d'altronde, posto $k=10^q$, abbiamo $10^q-1=$ ad un numero forma-

to di tanti g, quanto viene indicato dall' intero q. Dunque essendo $\frac{a}{10^q - 1}$ la frazione, da cui risulta con la divisione attuale la serie $\frac{a}{10^q} + \frac{a}{10^{2q}} + \frac{a}{10^{3q}} +$ ec.; quindi apparisce la ragione del metodo, che si tiene dagli Aritmetici, onde ridurre un decimale periodico a frazione ordinaria, ossia a quella frazione, da cui è stato prodotto. Quanto poi si è detto fin quì mostra, che il periodico decimale si accosta sempre più al valore della frazione, da cui nasce, e troncato il periodico stesso al termine per esempio $\frac{a}{10^{nq}}$, l'altro $\frac{a}{10^{nq}(10^q - 1)}$ esprimerà esattamente la differenza che passa tra esso periodico, e la frazione.

132. *Teor.* 1.° Se i tre termini a, b, c sono in continua proporzione aritmetica; diviso per ciascuno di essi uno stesso numero M, i tre risultati $\frac{M}{a}$, $\frac{M}{b}$, $\frac{M}{c}$ saranno in continua proporzione armonica; e viceversa posti quelli in continua proporzione armonica saran questi in continua aritmetica.

Dim. I. Si verificherà la prima parte di questo Teorema, mentre, posto $c = 2b - a$ (II. *n.*° 127. *Alg.*), risulti $\frac{M}{a} - \frac{M}{b} : \frac{M}{b} - \frac{M}{c} :: \frac{M}{a} : \frac{M}{c}$ (*n.*° 140. *Alg.*).

Ora a cagione di $c = 2b - a$, abbiamo $\frac{M^2}{ab} = \frac{(2b-a)M^2}{abc} = \frac{2M^2}{ac} - \frac{M^2}{bc}$, onde si ricava $\frac{M^2}{ab} - \frac{M^2}{ac} = \frac{M^2}{ac} - \frac{M^2}{bc}$, e però $\frac{M}{a}\left(\frac{M}{b} - \frac{M}{c}\right) = \frac{M}{c}\left(\frac{M}{a} - \frac{M}{b}\right)$, e quindi fi-

nalmente $\frac{M}{a}-\frac{M}{b}:\frac{M}{b}-\frac{M}{c}::\frac{M}{a}:\frac{M}{c}$. Dunque ec.

II. Nell' altro caso, poichè si ha $c=\frac{ab}{2a-b}$, otterremo $\frac{M}{a}+\frac{M}{c}=\frac{M}{a}+\frac{M(2a-b)}{ab}=\frac{Mb+2Ma-Mb}{ab}=\frac{2M}{b}$, e però $\frac{M}{a}$, $\frac{M}{b}$, $\frac{M}{c}$ in continua proporzione aritmetica. Dunque ec.

133. *Cor.* I. In conseguenza del (I. *n.° prec.*) se divideremo una quantità costante M per ciascun termine di una serie aritmetica a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, ec.; la serie che ne nasce, $\frac{M}{a}$, $\frac{M}{a+d}$, $\frac{M}{a+2d}$, $\frac{M}{a+3d}$, ec. sarà armonica, e pel (II. *n.° prec.*) qualunque serie armonica potrà sempre venire prodotta nell'accennata maniera.

II. Il termine generale di una serie armonica sarà perciò in generale $\frac{M}{a+(n-1)d}$.

CAPO IV.

Dei Logaritmi.

134. *Scol.* 17.° Preso il termine generale della serie (XLVIII) cioè am^{n-1} (*n.*° 129), si cangi in esso l'esponente $n-1$ nella y, e si ponga $am^{y}=x$. È questa un' Equazione fra le due indeterminate x, y nella quale agl' infiniti continuati valori, che si possono attribuire alla y corrispondono evidentemente infiniti valori della x, e viceversa.

135. *Def.* 15.ª Una quantità, quale è la precedente m^{y}, che abbia l' incognita nell' esponente dicesi *esponenziale*, e quindi *Equazione esponenziale* dicesi quella, ne' cui membri si contengono una o più di simili quantità, tale è la supposta $am^{y}=x$. In questa Equazione poi i valori della x si denominano *Numeri*, i corrispondenti della y *Logaritmi*, ed il complesso totale sì de' numeri, che de' Logaritmi costituisce sotto un dato valore di a, ed un dato di m, ciò che dicesi *Sistema Logaritmico*, del quale la quantità m si chiama la *Base*, ed il coefficiente a il *Protonumero*.

136. *Scol.* 18.° Affine di indicare il Logaritmo di una quantità, ci serviremo delle lettere iniziali log., oppure Log. o più brevemente delle sole lettere l, L, onde le espressioni Log. P, L. P, Log.$(x+b)$, L$(x+b)$ significano rispettivamente i Logaritmi delle P, $x+b$.

137. *Cor.* I. Dall'Equazione $x=am^{y}$ (*n.*° 134) ri-

ricaveremo adunque $y = lx$ (n.^{i} 135, 136), e si avrà quindi $x = am^{lx}$.

II. Essendo le due Equazioni $x = am^y$, $y = lx$ identiche fra loro, potrà dalla prima conchiudersi la seconda, e viceversa.

III. Se si ha un' Equazione $X = x$, sarà ancora in corrispondenza $\log. X = \log. x$. Imperciocchè supposto $\log. X = Y$, $\log. x = y$, risulterà $X = am^Y$, $x = am^y$ (prec. II), e però $am^Y = am^y$, $m^Y = m^y$, e quindi a cagione della stessa base m, in corrispondenza $Y = y$, ossia $lX = lx$.

IV. Ritenute le denominazioni precedenti, dalla Equazione $Y = y$, ossia $lX = lx$ si ricaverà l' Equazione $X = x$. Difatti dalla $Y = y$ si ritrae tosto l' altra $am^Y = am^y$, ma $am^Y = X$, $am^y = x$. Dunque ec.

V. Chiamato ω il logaritmo dell' unità, onde $\log. 1 = \omega$, sarà $1 = ma^{\omega}$.

VI. Si faccia $x = a$; ne verrà $a = am^y$, e però $1 = m^y$; ma m^y diventa 1, quando $y = 0$: Dunque un logaritmo del Protonumero è lo zero, e quindi si ha $la = 0$.

VII. Supponghiamo $x = m$; risulterà $m = am^y$, e quindi $1 = am^{y-1}$: si divida per la Equazione $1 = am^{\omega}$ (prec. V), e ottenendosi $1 = m^{y-1-\omega}$, questa sarà un Equazione vera, ogniqualvolta si abbia l'esponente, in essa, della m uguale allo zero. Posto dunque $y - 1 - \omega = 0$, giacchè risulta $y = 1 + \omega = 1 + l1$, ne segue che il logaritmo della base

uguaglia l' unità più il logaritmo dell' unità medesima.

VIII. Al variarsi delle quantità a, m, varieranno i sistemi logaritmici ($n.^o$ 135); cosicchè le due Equazioni $x = am^y$ $x = AM^Y$ costituiranno due sistemi diversi, e corrispondentemente ad uno stesso valore della x sarà il logaritmo y nel primo, generalmente parlando, diverso dal logaritmo Y nel secondo.

138. *Def.* 16.^{a} Il dedurre dalle Equazioni $x = am^y$, $X = x$ rispettivamente le altre $y = lx$, $lX = lx$ ciò è, che dicesi *passare dai numeri ai logaritmi*; il ricavare poi viceversa dalle $y = lx$, $lX = lx$ le altre $x = am^y$, $X = x$ si dice *passare dai logaritmi ai numeri*.

139. *Teor.* 8.^{o} Denominati $x', x'', x''', x^{\text{iv}}$, ec. dei numeri qualsivogliono, $y', y'', y''', y^{\text{iv}}$, ec. i logaritmi corrispondenti; se questi formano una progressione aritmetica, quelli la formano geometrica, e viceversa.

Dim. Avendosi per la supposizione le Equazioni $x' = am^{y'}$, $x'' = am^{y''}$, $x''' = am^{y'''}$, $x^{\text{iv}} = am^{y^{\text{iv}}}$, ec., si dividano esse successivamente l' una per l'altra, onde ottenere i risultati $\frac{x''}{x'} = m^{y''-y'}$, $\frac{x'''}{x''} = m^{y'''-y''}$, $\frac{x^{\text{iv}}}{x'''} = m^{y^{\text{iv}}-y'''}$, ec. Ora

I. Volendosi $y', y'', y''', y^{\text{iv}}$, ec. in progressione aritmetica, deve essere $y''-y' = y'''-y'' = y^{\text{iv}} - y''' =$ ec. ($n.^o$ 34.). Dunque risultando $m^{y''-y'} = m^{y'''-y''} = m^{y^{\text{iv}}-y'''} =$ ec., ne verrà $\frac{x''}{x'} = \frac{x'''}{x''} = \frac{x^{\text{iv}}}{x'''} =$ ec., e per conseguenza $\div\!\!\div x', x'', x''', x^{\text{iv}}$, ec.

II. Che se si abbia da prima $\div\!\!\div x', x'', x''', x^{\text{iv}}$,

ec., e però $\frac{x''}{x'} = \frac{x'''}{x''} = \frac{x^{\text{IV}}}{x'''}$ = ec.; allora risultando

$m^{y''-y'} = m^{y'''-y''} = m^{y^{\text{IV}}-y'''}$ = ec. a cagione della stessa base m si avrà $y''-y' = y'''-y'' = y^{\text{IV}}-y'''$ = ec., è quindi $\div\ y', y'', y''', y^{\text{IV}}$, ec. Dunque ec.

140. *Scol.* 19.° I. Suppongasi, che la serie geometrica del (II. *n.*° 139) cominci dal protonumero, e sia $\frac{x'}{a} = m$. Protraendo in questa ipotesi la serie supposta indefinitamente a destra, ed a sinistra di a, ne verrà la indicata qui sotto in (L) nella prima linea; ma $la = 0$ (VI. *n.*° 131), e per essere $\frac{x'}{a} = m$; abbiamo $y' = 1$. Dunque i numeri della seconda riga pel (II. *n.*° *prec.*) esprimeranno i logaritmi delle quantità corrispondenti nella prima

$$\begin{array}{l}\text{ec.}, am^{-(p+1)}, am^{-p}, \text{ec. } am^{-3}, am^{-2}, am^{-1} \\ a, am, am^2, am^3, \text{ec. } am^n, am^{n+1}, \text{ec.} \\ \text{ec.} -(p+1), -p, \text{ec.} -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \text{ec. } n, \\ n+1, \text{ec.}\end{array} \quad \text{(L)}$$

II. Si chiami P la media proporzionale geometrica tra i numeri am^n, am^{n+1}, risultando $P = am^{\frac{2n+1}{2}}$ si avrà $lP = \frac{n+1}{2}$ (I. *n.*° 137); e però il logaritmo di questa altro non è, che la media proporzionale aritmetica tra i logaritmi rispettivi n, $n+1$. Denominata Q la media proporzionale geometrica tra am^n, e $P = am^{\frac{2n+1}{2}}$, poichè si ha $Q = am^{\frac{4n+1}{4}}$, e quindi $lQ = \frac{4n+1}{4}$; ne segue, che il logaritmo di questa seconda media geometrica altro

non è, che la media proporzionale aritmetica tra i logaritmi corrispondenti n, $\frac{2n+1}{2}$. Così proseguendo, si vede dalla natura stessa dell'operazione, che a tutte le successive medie proporzionali geometriche corrispondono sempre per logaritmi tante medie proporzionali aritmetiche.

III. Nella nostra supposizione abbiamo $x'':a::x'^2:a^2$, $x''':a::x'^3:a^3$, $x^{\text{IV}}:a::x'^4:a^4$ (n.° 131. *Alg.*), ed i valori de' logaritmi y', y'', y''', y^{IV}, ec. sono 1, 2, 3, 4, ec. (*prec.* I). Dunque mentre la ragione $x'':a$ è duplicata della prima $x':a$, il logaritmo y'' è doppio dell'altro y'; mentre le ragioni $x''':a$, $x^{\text{IV}}:a$, ec. sono rispettivamente triplicata, quadruplicata ec. della stessa $x':a$, i logaritmi y''', y^{IV}, ec. sono in corrispondenza doppio, triplo ec. dello stesso y'; e per conseguenza, supposto che la ragione $x':a$ si consideri di 1.° grado, ciascuno dei logaritmi y', y'', y''', y^{IV}, ec. esprimerà il grado della ragione, che ha rispettivamente ciascheduno dei numeri x', x'', x''', x^{IV}, ec. con il primo a, il quale perciò si chiama *protonumero*. Egli è da questo, che agli accennati y', y'', y''', y^{IV}, ec. si dà il nome di *logaritmi*, essendo questa una parola la quale composta dalle due λόγος, ἀριθμός, che significa *Ragione dei Numeri*.

141. *Teor.* 9.° Il Logaritmo del prodotto di quante si vogliono n quantità uguaglia la somma dei logaritmi delle quantità medesime meno il logaritmo dell'unità ripetuto le volte $n-1$.

Dim. Rappresentatesi con le x', x'', x''', x^{IV}, ec. delle quantità qualsivogliono, e con le y', y'', y''', y^{IV}, ec. i logaritmi corrispondenti, si moltiplichino fra loro le Equazioni $x'=am^{y'}$, $x''=am^{y''}$; $x'''=am^{y'''}$, ec. $x^{(n)}=am^{y^{(n)}}$, avuta così la nuova

Equazione $x' x'' x''' \ldots x^{(n)} = a^{n} m^{y'+y''+y'''+ \text{ec.} + y^{(n)}}$, si divida essa per l'altra $1 = am^{\omega}$ (V. n.° 137) elevata alla potenza $n-1$ esima, cioè per $1 = a^{n-1} \times m^{(n-1)\omega}$, e poichè risulta $x', x'' x''' \ldots x^{(n)} = am^{y'+y''+y'''+ \text{ec.} + y^{(n)} - (n-1)\omega}$, e fatto $x' x'' x''' \ldots x^{(n)} = z$, $y'+y''+y'''+\text{ec.}+y^{(n)} - (n+1)\omega = u$, poichè si ha $z = am^{u}$, e quindi $lz = u$ (V. n.° 137); avremo $lx' x'' x''' \ldots x^{(n)} = y'+y''+y'''+ \text{ec.} + y^{(n)} - (n+1)\omega$, e però $l\, x' x'' x''' \ldots x^{(n)} = lx' + lx'' + lx''' + \text{ec.} + lx^{(n)} - (n-1)l1$. Dunque ec.

142. *Teor.* 10.° Il logaritmo del quoto fra due quantità uguaglia la differenza del logaritmo del divisore dal logaritmo del dividendo aumentata del logaritmo dell' unità.

Dim. Divisa l'Equazione $x' = am^{y'}$ per l'altra $x'' = am^{y''}$, e moltiplicato il risultato $\frac{x'}{x''} = m^{y'-y''}$ per la $1 = am^{\omega}$ (V. n.° 137) poichè si ottiene $\frac{x'}{x''} = am^{y'-y''+\omega}$, sarà $l\frac{x'}{x''} = y' - y'' + \omega = lx' - lx'' + l1$.

143. *Teor.* 11.° Il logaritmo della potenza n di una qualunque quantità x altro non è che il Logaritmo di essa x moltiplicato per l' esponente n meno il logaritmo dell'unità presso $n-1$ volte.

Dim. Si elevi la $x = am^{y}$ alla potenza n, e si divi-

da per la $1 = a^{n-1} m^{(n-1)\omega}$ (V. *n.°* 137). Risultando da ciò $x^n = am^{ny-(n-1)\omega}$ si avrà $lx = ny - (n-1)\omega = nlx - (n-1)l1$. Dunque ec.

144. *Teor.* 12.° Il logaritmo di un qualunque radicale $\sqrt[r]{x}$ uguaglia il logaritmo della quantità posta sotto del vincolo, cioè il logaritmo della x, aggiuntovi il logaritmo dell' unità moltiplicato per $r-1$, e tutto diviso per l'esponente del radicale, per r.

Dim. La dimostrazione di questa proposizione non è che un corollario di quella del (*n.° prec.*). Imperciocchè supposto $n = \frac{1}{r}$, e fatte le opportune sostituzioni, otterrassi $l\sqrt[r]{x} = \frac{lx+(r-1)l1}{r}$.

145. *Sool.* 20.° Suppongasi un sistema, nel quale sia il Protonumero $a = 1$, e l' Equazione $x = m^y$. In essa risultando $l1 = 0$ (VI. *n.°* 137), e quindi $lx' \, x'' \, x''' \ldots x^{(n)} = lx' + lx'' + lx''' + \text{ec.} + lx^{(n)}$ (*n.°* 141), $l\frac{x'}{x''} = lx' - lx''$ (*n.°* 142), $lx^n = nlx$ (*n.°* 143), $l\sqrt[r]{x} = \frac{lx}{r}$ (*n.°* 144); ne segue, che quando il protonumero è l'unità,

1.° il logaritmo di un prodotto qualunque uguaglia la somma dei logaritmi dei fattori: 2.° il logaritmo di un quoto è uguale al logaritmo del dividendo diminuito di quello del divisore: 3.° il logaritmo di una potenza uguaglia il logaritmo della quantità elevata a potenza moltiplicato per l' esponente: 4.° finalmente il logaritmo di un radicale è uguale al logaritmo della quantità posta sotto del segno diviso per l' indice del radicale. Queste proprietà sono di un massimo vantaggio nei Calcoli.

146. *Probl.* 29.° Conosciuti i logaritmi di un dato sistema (*n.*° 135), determinare dipendentemente da questi il logaritmo di un dato Numero in un altro sistema logaritmico qualunque.

Sol. Supposto essere $x = am^y$ l' Equazione esponenziale del sistema dato, ed $x = AM^Y$ l' Equazione dell' altro (VIII. *n.*° 137), supposto denotarsi con la lettera l i logaritmi del primo, con la L i logaritmi del sistema secondo, e supposto finalmente, che la lettera x denoti in amendue le Equazioni un medesimo numero, osservo, che prendendo i logaritmi giusta il primo sistema, dall' Equazione seconda si ha $lx = lAM^Y$ (III. *n.*° 137) $= lA + lM^Y - l1$ (*n.*° 141) $= lA + YlM - (Y-1)l1 - l1$ (*n.*° 143). Dunque sarà $Y = \frac{lx - lA}{lM - l1}$, ma $Y = Lx$ è appunto la quantità, che si cerca. Dunque conosciuti dal primo sistema i valori delle quantità lx, lA, lM, $l1$, si otterrà tosto con la formola truovata il valore di Lx.

147. *Scol.* 21.° I. Sia $A = a$, ne verrà $Lx = \frac{lx}{lM - lx}$ (VI. *n.*° 137), e però $Lx : lx :: 1 : lM - l1$. Dunque se in due sistemi il protonumero è lo stesso, i logaritmi di uno stesso numero sono in ragione costante.

II. Avendosi dal (*prec.* I) $Lx' : Lx'' :: lx' : lx''$, apparisce, che in due sistemi dotati dello stesso protonumero, i logaritmi di due numeri sono nella medesima ragione nell' un sistema, e nell'altro.

III. Che se $A = a = 1$, risultando $Lx = \frac{lx}{lM}$, otterremo la soluzione del Problema del (*n.*° *prec.*) semplicemente col dividere lx per lM.

148. *Teor.* 13.° Posta la base m del sistema $x = am^y$ positiva, i logaritmi de' numeri negativi sono impossibili, mentre il protonumero a sia positivo, e se esso protonumero sia negativo, allora sono impossibili i logaritmi de' numeri positivi.

Dim. Ogniqualvolta il logaritmo, ossia il valore della y sia reale, dovrà necessariamente essere maggiore, oppure minore, oppure uguale allo zero; ma in tutti, e tre questi casi il valore di m^y è positivo. Dunque nel caso del protonumero positivo risultando sempre $am^y > 0$, e nel caso del protonumero negativo avendosi sempre $-am^y < 0$; ne segue, che, mentre il logaritmo y sia reale il corrispondente numero x dovrà essere sempre nel primo de' supposti casi positivo, nel secondo negativo, e però ec.

149. *Scol.* 22.° I. Poichè l' Equazione $-x = -am^y$ equivale all' altra $x = am^y$; ne segue, che il logaritmo di un dato numero negativo in un sistema avente il protonumero $-a$, e la base m uguaglia il logaritmo del numero stesso preso positivamente nel sistema dotato della medesima base m, e del protonumero $+a$.

II. Vogliasi la base del sistema negativa. Avendosi le espressioni $(-m)^{\frac{1}{2}}$, $(-m)^{\frac{1}{4}}$, $(-m)^{\frac{1}{6}}$ tutte di valore immaginario, ne viene, che ogniqualvolta la y, e però il logaritmo uguagliasse uno dei numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, ec. il corrispondente rapporto $\frac{x}{a}$ sarebbe, nell' ipotesi ora fatta, immaginario, e però tale il numero x, mentre si ponga reale il protonumero a.

III. Per l'uso che si fa nelle Matematiche dei logaritmi, il quale è grandissimo, si vuole, che posto il protonumero reale, a tutti i valori reali della y corrispondano valori reali della x; ma la supposizione della base negativa non soddisfa a questa condizione (*prec.* II). Dunque converrà porre detta base sempre positiva.

150. *Probl.* 20.° Cercasi di svolgere in serie la quantità esponenziale m^y, qualunque sia il valore della y.

Sol. Si ponga

$m^y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{ec.} + My^{n-1} + Ny^n + \text{ec.}$, ove i coefficienti A, B, C, ec. sono indipendenti dalla y. Facciasi $y=0$; risultando da ciò $A = m^0 = 1$ per la ragione stessa, che si è adotta nel (n.i 201, 203. *Alg.*), dovrà essere

$$m^y = 1 + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{ec.} + My^{n-1} + Ny^n + \text{ec.} \quad \text{(LI)}$$

Si accresca ora la y di una quantità indeterminata z, ne verrà $m^{y+z} = 1 + B(y+z) + C(y+z)^2 + D(y+z)^3 + E(y+z)^4 + \text{ec.} + M(y+z)^{n-1} + N(y+z)^n + \text{ec.}$ e sviluppando, col tener conto solamente fino alla prima potenza della z, avremo

$$\left.\begin{array}{l} m^{y+z} = 1 + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{ec.} + My^{n-1} + Ny^n + \text{ec.} \\ + z(B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 + \text{ec.} + (n-1)My^{n-2} + nNy^{n-1} + \text{ec.} \\ \text{ec.} \end{array}\right) \text{(LII)}$$

Ora, posta nella (LI) la z invece della y, ne viene $m^z = 1 + Bz + \text{ec.}$, e moltiplicando fra loro le serie, a cui si uguagliano le podestà m^y, m^z, col non oltrepassare nella operazione la prima potenza della z, ottienesi

$$m^y \times m^z = 1 + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{ec.} + My^{n-1} + Ny^n + \text{ec.}$$

$$\text{(LIII)} \quad + z\left(B + B^2y + BCy^2 + BDy^3 + \text{ec.} + BLy^{n-2} + BMy^{n-1} + \text{ec.}\right)$$
$$\text{ec.}$$

Dunque a cagione di $m^{y+z} = m^y \times m^z$, essendo le due serie (LII), (LIII) uguali fra loro, e ciò qualunque siasi la z, dovrà pel ($n.^\circ$ 202. *Alg.*) essere

$$B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^4 + \text{ec.} + nNy^{n-1} = B + B^2y +$$

$$BCy^2 + BDy^3 + \text{ec.} + BMy^{n-1} + \text{ec.}$$

e quindi pel citato ($n.^\circ$ 202. *Alg.*) avendosi $B = B$, $2C = B^2$, $3D = BC$, $4E = BD$, ec. $(n-1)$ $N = BL$, $nN = BM$, ec., otterremo $B = B$, $C = \frac{B^2}{2}$, $D = \frac{BC}{3}$

(LIV) $= \frac{B^3}{2.3}$, $E = \frac{BD}{4} = \frac{B4}{2.3.4}$, ec. $N = \frac{BM}{n} = \frac{B^n}{2.3.4...n}$: ec.,

e però $m^y = 1 + By + \frac{B^2}{2}y^2 + \frac{B^3}{2.3}y^3 + \frac{B4}{2.3.4}y^4 + \text{ec.} +$ $\frac{B^n}{2.3.4...n}y^n$ + ec. Avvertasi, che in questa ricerca il coefficiente B rimane necessariamente indeterminato, e ciò per l' indeterminazione della m.

151. *Probl.* 21.° Truovare per serie il valore del precedente coefficiente B espresso per la base m.

Sol. Supposto $y = 1$, onde la (LIV) riducasi alla

$$\text{(LV)} \quad m = 1 + B + \frac{B^2}{2} + \frac{B^3}{2.3} + \frac{B4}{2.3.4} + \text{ec.}$$

si cerchi da questa col mezzo del regresso delle serie ($n.^\circ$ 106) il valore di B, ed operando pienamente, come nel ($n.^\circ$ 107) truoveremo pel chiesto valore di B risultare

$$\text{(LVI)} \quad B = (m-1) - \frac{(m-1)^2}{2} + \frac{(m-1)^3}{3} - \frac{(m-1)^4}{4} + \text{ec.}$$

152. *Def.* 16.ª La precedente quantità B, il cui valore dipende dal valore della base m (*n.° prec.*), dicesi *Modulo* del sistema. Quel sistema logaritmico poi, nel quale tanto il protonumero, come il modulo sono $=1$, dicesi dal suo Inventore *Neperiano*, e impropriamente *Iperbolico*.

153. *Scol.* 23.° I. Pongasi nella (LV) $B=1$; risultando da ciò $m=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+$ ec. $=2,718281828459045123536\ldots$, questo numero esprimerà per approssimazione il valor della base nel sistema Neperiano (*n.° prec.*), valore, che per brevità rappresenteremo sempre in avvenire con la lettera e; onde l' Equazione fondamentale di tal sistema sarà $x=e^{y}$.

II. A cagione di $n=1$ (*n.°* 152) si verificherà nel sistema iperbolico quanto è stato detto nel (*n.°* 145):

III. Per la serie (LIV), e pel (*prec.* I) avremo nello stesso sistema

$$e^{y}=x=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{2.3}+\frac{y^4}{2.3.4.}+\text{ec.}+\frac{y^n}{2.3.4\ldots n}+\text{ec.} \qquad \text{(LVII)}$$

IV. Denotati con la lettera l i logaritmi nel sistema iperbolico, e con la L i logaritmi in un altro sistema qualunque $x=am^{y}$, si ponga nella (LIV) $y=\frac{1}{B}$; avendosi da ciò $m^{\frac{1}{B}}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\text{ec.}=e$ (*prec.* I), otterremo $m=e^{B}$, e però $B=lm$ (*prec.* II, *n.°* 145, VII. *n.°* 137); d'onde apparisce, che in un sistema qualunque il modulo uguaglia il logaritmo iperbolico della base corrispondente, e per la (LVI) avremo quindi

$$lm=(m-1)-\frac{(m-1)^2}{2}+\frac{(m-1)^3}{3}-\frac{(m-1)^4}{4}+\text{ec.} \qquad \text{(LVIII)}$$

V. Dalla Equazione precedente $m = e^{B}$ deducesi $\frac{1}{m} = e^{-B}$; ma da quest' ultima Equazione apparisce, che quando m si cambia in $\frac{1}{m}$, B si cangia in $-$B. Eseguite adunque simili mutazioni nella (LVI), poichè risulta $-B = \left(\frac{1}{m} - 1\right) - \frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}{2} +$ ec., ne verrà

$$\text{(LIX)} \quad B = lm = \frac{(m-1)}{m} + \frac{(m-1)^2}{2m^2} + \frac{(m-1)^3}{3m^3} + \frac{(m-1)^4}{4m^4} + \text{ec.}$$

VI. Pel ($n.^o$ 146), e pel (*prec.* IV.) sarà $Lx = \frac{lx - la}{B}$, e nel sistema $x = m^{y}$ sarà $Lx = \frac{lx}{B}$.

154. *Probl.* 22.° Svolgere nel sistema Neperiano in serie il logaritmo di una quantità x.

Sol. Qualunque siano i valori, che si vogliono attribuire alla supposta x, potendo sempre evidentemente supporre tanti sistemi logaritmici, i quali abbiano tali valori per basi, potremo sempre dire di ciascuno di essi, e però della stessa x, ciocchè precedentemente si è detto della base m; e collocando per conseguenza nelle (LVIII), (LIX) in vece della m la x, avremo per la chiesta serie corrispondentemente

$$lx = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \text{ec.}$$

$$\text{(LX)} \quad lx = \frac{(x-1)}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \frac{(x-1)^4}{4x^4} + \text{ec.}$$

155. *Scol.* 24.° I. Supposto $\frac{1}{B} = k$, poichè si ha $lx - la = l\frac{x}{a}$ ($n.^o$ 145), sarà pel (V. $n.^o$ 153) $Lx = kl\frac{x}{a}$;

e perciò collocando nelle (LX) $\frac{x}{a}$ invece della x, otterremo in corrispondenza

$$Lx = k\left(\frac{(x-a)}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} - \frac{(x-a)^4}{4a^4} + \text{ec.}\right)$$

$$Lx = k\left(\frac{(x-a)}{x} + \frac{(x-a)^2}{2x^2} + \frac{(x-a)^3}{3x^3} + \frac{(x-a)^4}{4x^4} + \text{ec.}\right),$$

e supposto, anche nel sistema $x = am^y$, il protonumero $a = 1$, avremo

$$Lx = k\left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \text{ec.}\right),$$

$$Lx = k\left(\frac{(x-1)}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \frac{(x-1)^4}{4x^4} + \text{ec.}\right). \quad \text{(LXI)}$$

II. Si collochi tanto nelle (LX), come nelle (LXI) $x+1$ invece della x; ne verranno quindi le serie

$$l(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ec.},\ l(x+1) = \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{2(x+1)^2} + \frac{x^3}{3(x+1)^3} + \frac{x^4}{4(x+1)^4} + \text{ec.} \quad \text{(LXII)}$$

$$L(x+1) = k\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ec.}\right),\ L(x+1) = k\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{2(x+1)^2} + \frac{x^3}{3(x+1)^3} + \frac{x^4}{4(x+1)^4} + \text{ec.}\right).$$

III. Si ponga $x = \frac{z}{b}$, risultando $l(x+1) = l\left(\frac{z}{b} + 1\right) = l\left(\frac{z+b}{b}\right) = l(z+b) - lb$, si avrà

$$l(z+b) = lb + \frac{z}{b} - \frac{z^2}{2b^2} + \frac{z^3}{3b^3} - \frac{z^4}{4b^4} + \text{ec.}$$

155. *Def.* 17.ª La precedente quantità k, che moltiplicando la serie $\frac{(x-a)}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \text{ec.}$ sommi-

nistra la serie, nella quale si sviluppa il logaritmo di un numero qualunque x nel sistema $x = am^y$, dicesi *Sottotangente*, o *Sottangente* del sistema medesimo.

157. *Scol.* 25.° I. Dall' Equazione $\frac{1}{B} = k$, e dalle (LV), (LVI) apparisce essere la base, il modulo, e la sottotangente di un dato sistema, tre quantità dipendenti l' una dall' altra, cosicchè, conoscintane una, potremo dedurre il valore delle altre due; e sarà

$$k = \frac{1}{(m-1) - \frac{(m-1)^2}{2} + \frac{(m-1)^3}{3} - \frac{(m-1)^4}{4} + \text{ec.}},$$

$$m = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2.3k^3} + \text{ec.}$$

II. Nel sistema iperbolico tanto la sottotangente, come il modulo uguagliano l' unità.

III. Pei (VI. *n.*° 153, I. *n.*° 155) avendosi $Lx = klx$, otterremo i logaritmi di un sistema qualunque, nel quale il Protonumero sia $= 1$, col moltiplicare semplicemente i logaritmi del sistema Neperiano per la sottangente nel sistema supposto.

IV. Le proprietà dimostrate de' logaritmi offrono un mezzo onde provare, che qualunque sia l' esponente, il coefficiente del secondo termine della serie, che si ottiene sviluppando la potenza $(z+b)^h$ è sempre hb^{h-1}. Supposto difatti $(z+b)^h = p + qz + rz^2 + \text{ec.}$, osservo, che quando $z = 0$, risulta $p = b^h$; sostituito perciò questo valore, e posto $qz + rz + \text{ec.} = P$, avremo $l(z+b)^h = l(b^h + P)$, e però $hlb + \frac{hz}{b} - \frac{hz^2}{2b^2} + \text{ec.} = hlb + \frac{P}{b^h} - \frac{P^2}{2b^{2h}} + \text{ec.}$

(III. $n.^{\circ}155$). Si ponga ora invece di P il suo valore ne verrà $\frac{hz}{b}$ — ec. $= \frac{qz}{b^h}$ — ec. Dunque avendosi $\frac{h}{b}$ $= \frac{q}{b^h}$ (I. $n.^{\circ}$ 202. *Alg.*), risulterà $q = hb^{h-1}$ (*).

158. *Teor.* 14.° La prima delle serie (LXII) è sempre convergente, ogniqualvolta si abbia x non > 1, ed è divergente sempre, mentre sia $x > 1$.

Dim. Per la riflessione fatta nel ($n.^{\circ}$ 272. *Alg.*) la serie sarà convergente, mentre i termini, che la compongono, vadano, fatta astrazione dal segno, decrescendo sempre più di valore, quanto più si allontanano dal principio della serie; e sarà essa divergente, quanto più gl' indicati termini nell'allontanarsi si vanno aumentando. Ora presi, prescindendo dal segno, due termini successivi della supposta serie (LXII), in generale i due $\frac{x^n}{n}$, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, è chiaro, che, mentre sia x non > 1, si ha sempre $\frac{x^n}{n} > \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Dunque in questa prima ipotesi il valore dei termini successivi diminuendosi sempre di più, la serie sarà convergente. Sia in secondo luogo $x > 1$. Fatto in questo caso $x = 1 + z$, avremo $z > 0$, e siccome n può aumentarsi all' infinito, si ponga aumentato fino a risultare $> \frac{1}{z}$: ne verrà $nz > 1$, e però $nz + n > n + 1$; ma $nz + n = nx$; dunque essendo $nx > n + 1$, si avrà $\frac{x}{n+1} > \frac{1}{n}$, e quindi $\frac{x^{n+1}}{n+1} > \frac{x^n}{n}$; onde la serie sarà divergente.

159. *Scol.* 26.° I. Quanto si è dimostrato pre-

(*) *Paoli* Supplemento agli Elementi di Algebra Opuscolo I. n.° 4.

sentemente della prima delle serie (LXII) è chiaro essersi dimostrato ancora della serie terza, e della (LVIII), dicendosi in quest' ultima della $m-1$, ciocchè nelle altre due si è detto della x.

II. Allorchè sia $x>1$; saranno evidentemente convergenti la seconda, e la quarta delle serie (LXII), e tale sarà la serie (LIX), quando $m-1>1$.

III. In conseguenza di ciò, se venga richiesto il valore del modulo B, data la base m del sistema corrispondente; otterremo tal valore per approssimazione, servendoci della serie (LVI) quando $m-1<1$, e della (LIX), quando $m-1>1$. Facendo $m=10$, si avrà

$$B=0,9+\frac{(0,9)^2}{2}+\frac{(0,9)^3}{3}+\text{ec.}=2,30258509299404568 4\ldots\,.$$

160. *Teor.* 15.° Nella supposizione del numero n infinito sarà $e^y=\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$.

Dim. Abbiamo $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=1+y+\frac{n(n-1)}{2n^2}y^2$ $+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3n^3}y^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4n^4}y^4+$ ec. Ora $\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3n^3}=\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4n^4}=\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{4n}+\frac{11}{24n^2}-\frac{1}{4n^3}$, ec. Dunque quanto più cresce il valore di n tanto più i coefficienti della y si accostano come a limite corrispondentemente ai valori 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2.3}$; $\frac{1}{2.3.4}$, ec., in quantochè sempre più diminuisconsi i valori $\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}$, $\frac{1}{4n}+\frac{11}{24n^2}-\frac{1}{4n^3}$, ec. Pertanto se n diviene infinito, dovendo allora considerarsi tutti i termini della serie $1+y+\frac{n(n-1)}{2n^2}y^2+$ ec. nei lo-

loro limiti (I. *n.*° 98. *Alg.*) essa serie diviene $1+y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2.3}y^3+\frac{1}{2.3.4}y^4+$ ec., e quindi, quando n è infinito, si avrà $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{2.3}+\frac{y^4}{2.3.4}+$ ec.; ma questa serie è $=e^y$ (III. *n.*° 153). Dunque ec.

161. *Teor.* 16.° Nel sistema iperbolico corrispondentemente ad un dato valore reale e positivo del numero x, il logaritmo y avrà infiniti valori diversi uno reale, e gli altri tutti immaginarj. Che se il valore di x sia reale, e negativo, anche allora avrà y infiniti valori diversi, ma tutti immaginarj.

Dim. Pel (*n.*° *prec.*), posto n infinito, abbiamo $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=x$; dunque il valore della y dipende da un' Equazione, che ha forma algebraica, di grado infinito; ma dalle proprietà delle Equazioni si ha, che un' Equazione algebraica contiene sempre tante radici reali, od immaginarie, quanto è il grado dell' Equazione medesima. Dunque, qualunque sia il valore del numero x, i valori di y, i quali non sono che le radici della $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=x$, saranno di numero infinito.

I. Sia $x>0$, nel tempo stesso sia $x<1$, e potendo il numero n volersi pari, e dispari; vogliasi in primo luogo dispari; in questo caso la verità della prima parte del Teorema apparisce dall'osservare semplicemente, che per le proprietà sovraccennate delle Equazioni tra gl' infiniti valori di y nella $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=x$ uno solo è reale; e gli altri tutti sono immaginarj. Che se si vuole n pari, suppongo $x=1-z$, avremo $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=1-z$, e però $1+\frac{y}{n}$

$$=\pm(1-z)^{\frac{1}{n}}=\pm\left(1-\frac{z}{n}-\frac{(n-1)z^2}{2n^2}-\frac{(n-1)(2n-1)z^3}{2.3n^3}-\text{ec.}\right),\text{ ed}$$

$$y=-n\pm\left(n-z-\frac{(n-1)z^2}{2n}-\frac{(n-1)(2n-1)z^3}{2.3n^2}-\text{ec.}\right).$$

Si tenga conto nella serie truovata del segno superiore, e si consideri n infinito; per le ragioni stesse, che sonosi addotte nel ($n.^\circ$ 160), otterremo $y=-\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\text{ec.}\right)$; ma a cagione di $x<1$, avendosi $z<1$, quest' ultima serie è convergente: dunque il corrispondente valore di y sarà reale. Tengasi secondariamente conto del segno inferiore, e sia parimenti n infinito, ne verrà $y=-2n+\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\text{ec.}\right)=$ a quantità infinita, e negativa; ma un tal valore di y è assurdo; perchè se esistesse ne verrebbe e^y, e però x di valore infinitamente piccolo, il che non può essere, giacchè il numero x avendo per la ipotesi un valore determinato è necessariamente finito. Dunque essendo per le proprietà delle Equazioni tutti gli altri $n-2$ valori della y nella $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=x$; immaginarj ne segue, che quando il valore di x esiste tra zero, ed uno, eziandio nella ipotesi di n pari si verificherà la prima parte del nostro Teorema. Sia presentemente $x>1$. Se si vuole n dispari, anche in questo caso si dice quello, che nella ipotesi di n dispari si è detto nel caso precedente. Che se si pone n pari, riduco la $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=x$ alla $\left(1+\frac{y}{n}\right)^{-n}=\frac{1}{x}$, e però alla $\left(1+\frac{y}{n}\right)^{-n}=1-z$, supposto

avendosi $\frac{1}{x} = 1 - z$; sarà ancor quivi $z > 0$, e < 1, e come precedentemente truovandosi $y = -n \pm \left(n - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} - \text{ec.}\right)$; allorchè si prende il segno superiore, avremo $y = -\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{ec.}\right)$ = quantità reali, perchè a cagione di $z < 1$, $z > 0$, la serie convergente; e quando si assume il segno inferiore avremo $y = -2n - \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{ec.}\right)$, valore, che, come di sopra, si truova impossibile a cagione di n infinito. Dunque essendo poi immaginarie tutte le altre $n - 2$ radici della $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = x$, la prima parte dell' esposto Teorema si verificherà eziandio nel caso presente.

II. Si ponga il numero dato negativo, si denomini perciò $-x$, e posto n infinito, avremo $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = -x$. Se si vuole n pari, avendosi $1 + \frac{y}{n} = \sqrt[n]{-x}$, i corrispondenti valori di y saranno tutti immaginarj. Mentre poi si voglia n dispari, posto nel caso di x non > 1 esso $x = 1 - z$, e posto $\frac{1}{x} = 1 - z$ nel caso di $x > 1$, avremo nel primo di questi casi $y = -2n + \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \text{ec.}\right)$, e nel secondo $y = -2n - \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \text{ec.}\right)$. Ora sì l' uno, che l' altro di questi valori è impossibile, perchè tanto l' uno, che l' altro è risul-

tato infinito, e d'altronde y per la ragione stessa, che si è detta di sopra, non può giammai esser tale. Dunque gl'infiniti valori di y, che dipendono dalla $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = -x$ essendo sempre tutti immaginarj, vogliasi n pari, o dispari, sia $x>$, o non >1; ne segue, che si verificherà in tutta la estensione anche la parte seconda del Teorema esposto.

162. *Scol.* 27.° I. Avendosi $Lx = \frac{lx-la}{B}$ (IV. *n.*° 153), ciocchè nel (*n.*° *prec.*) si è dimostrato dei logaritmi Neperiani, vedesi, che si dice ancora dei logaritmi in un altro sistema qualunque, il cui protonumero sia positivo. Che se il protonumero sia negativo, convien dire dei Logaritmi delle quantità negative, ciocchè si è detto di sopra dei logaritmi delle positive, e viceversa.

II. Quantunque i logaritmi si possano considerare dipendenti dalla $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = x$ (*n.*° 160) equazione di forma algebraica; pure essi, generalmente parlando, non si possono dire algebraici. Imperciocchè denominandosi quantità algebraiche solamente quelle, le quali sono formate da un numero finito di termini, ciascuno de' quali sia di valore finito, ed espresso soltanto col mezzo di una, o più delle sei operazioni dell'Algebra; ne segue, che tali non possono dirsi in generale i logaritmi, essendocchè in generale il loro valore, o si determina per serie aventi un numero di termini infinito (*n.i* 154., *seg.i*), o si deduce dalla $\left(1+\frac{y}{a}\right)^n = x$ con l'estrazione della radice *nesima*, ed il valore $n\sqrt[n]{x}-n$, che ne risulta, a cagione di n infinito, è formato di termini di valore non finito; o finalmente si esprime per lx, espressione non dipen-

dente dalle sei operazioni dell' Algebra. In conseguenza di ciò i logaritmi si collocano nel novero di quelle quantità, le quali per la mancanza di una o più delle sovraccennate condizioni non avendo il nome di algebraiche, si appellano *trascendenti*, o *trascendentali*.

163. *Scol.* 28.° I. Nella prima delle serie (LXI) si ponga $x = \sqrt[r]{z}$, risultando $Lx = \frac{Lz}{r}$ (*n.*° 145) ne verrà

$$Lz = kr\left((\sqrt[r]{z}-1) - \frac{1}{2}(\sqrt[r]{z}-1)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt[r]{z}-1)^3 - \frac{1}{4}(\sqrt[r]{z}-1)^4 + \text{ec.}\right), \text{(XLIII)}$$

e ponendo $-r$ invece di r, otterremo

$$Lz = kr\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^4 + \text{ec.}\right) \text{(LXIV)}$$

Sia ora $z > 1$. In questa ipotesi qualunque valore si attribuisca all' indice r è chiaro, che non potrà mai risultare $\sqrt[r]{z} = 1$; potremo però sempre dare ad r un valore tale, che $\sqrt[r]{z}$ superi l' unità meno di una data frazione, che dirò $\frac{1}{q}$, piccola quanto si vuole. Supposto difatti $\sqrt[r]{z} = 1 + \frac{1}{q}$, avremo $r = \frac{lz}{l\left(1+\frac{1}{q}\right)}$. Si collochino ora invece della x la z nella seconda delle serie (LX), e la $\frac{1}{q}$ nella seconda delle (LXII): avendosi da ciò $lz = \frac{z-1}{z} + \frac{(z-1)^2}{2z^2} + \text{ec.}$, $l\left(1+\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{2(q+1)^2} + \text{ec.}$, ed essendo queste serie amendue convergenti (II. *n.*°

159), potrà per approssimazione ottenersi il valore di $r = \frac{lz}{l(1+\frac{1}{q})}$. Attribuendo dunque ad r un valore intero maggiore dell'accennato, esso produrrà $\sqrt[r]{z} - 1 < \frac{1}{q}$.

II. Supponghiamo nel (*prec.* I) $\sqrt[r]{z} = 1 + \frac{1}{q}$, ricavandosi $\frac{1}{\sqrt[r]{z}} = \frac{q}{q+1}$, ed a cagione di $\sqrt[r]{z} > 1$; essendo $\frac{1}{\sqrt[r]{z}} < 1$ ne verrà $1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} = 1 - \frac{q}{q+1} = \frac{1}{q+1}$; ma $\frac{1}{q+1} < \frac{a}{q}$, dunque sarà ancora $1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} < 1 - \sqrt[r]{z}$. In conseguenza di ciò posto $z > 1$, e determinato opportunamente il valore di r, onde $\sqrt[r]{z} - 1$ sia < 1, amendue le serie (LXIII), (LXIV) saranno convergenti, e tanto più lo saranno, quanto r è più grande.

III. Nella serie (LXIV) essendo tutti i termini positivi, ed essa convergente, avremo il primo termine $kr\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right) <$ di tutta la serie, e però $< Lz$. Nella (LXIII) poi, siccome il secondo termine $\frac{1}{2}\left(\sqrt[r]{z}-1\right)^2$ supera il terzo $\frac{1}{3}\left(\sqrt[r]{z}-1\right)^3$; il quarto $\frac{1}{4}\left(\sqrt[r]{z}-1\right)^4$ il quinto $\frac{1}{5}\left(\sqrt[r]{z}-1\right)^5$; e così di se-

gnito; ne segue, che il valore della serie (LXIII), toltone il primo termine, dovrà essere negativo; e per conseguenza si dovrà in essa seria intera dal primo termine $kr(\sqrt[r]{z}-1)$ togliere una quantità, onde ottenere il valore di Lx; ma il valore intero della serie, compresovi il primo termine, è positivo, perchè essendo $z>1$, si ha $Lx>0$. Dunque sarà $kr(\sqrt[r]{z}-1)>Lx$, e però il valore di Lx contienesi fra i due limiti $kr\left(\sqrt[r]{z}-1\right)$, $kr\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)$.

IV. Poichè $kr\left(\sqrt[r]{z}-1\right)-kr\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)=kr\left(\sqrt[r]{z}-1\right)\times\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)$

ne segue, che minore di questo prodotto sarà l'accesso della serie (LXIII), e minore il disotto della (LXIV) dal vero valore di Lx.

164. *Def.* 18.ª Nella $x=am^{y}$ suppongasi $a=1$, $m=10$; risulta $x=10^{y}$, e il sistema logaritmico, che dipende da questa Equazione dicesi il *sistema volgare*, o quello *delle Tavole*; perchè nell' uso grandissimo, che si fa dei logaritmi, è questo il sistema generalmente adoperato ne' calcoli pratici, e su di esso sonosi formate delle Tavole, nelle quali scritti in colonna i numeri naturali, si hanno in corrispondenza i loro logaritmi ridotti a forma decimale, e viceversa. I logaritmi del sistema Neperiano, per la loro maggiore semplicità servono principalmente pei raziocinii, e pei calcoli algebraici.

165. *Scol.* 29.° I. Passando ora a determinare il metodo, onde formare le indicate Tavole, denotati con la espressione log. i logaritmi, che vi si

contengono, comincio dall'osservare, che, essendo $\log. x = \frac{lx}{B}$ (VI. *n.*° 153) $= klx$ (I. *n.*° 155), ed essendo nel sistema, che consideriamo, $k = \frac{1}{B} = \frac{1}{2,302585092994045684...}$ (III. *n.*° 159) $= 0,434294481903251...$, i logaritmi volgari, e le serie loro appartenenti, si otterranno, moltiplicando i logaritmi iperbolici, e le serie rispettive per quest' ultimo numero, il quale per semplicità seguiterò a denominare k.

II. Non potendosi i logaritmi determinare rapporto a tutti i numeri esattamente (II. *n.* °162), ed anzi pochissimi essendo que' numeri razionali, rapporto a' quali si ha questa determinazione esatta, hanno dovuto i Matematici cercare i loro valori per approssimazione. La continua ricerca de' medj proporzionali è stata pel (II. *n.*° 140) la via, che hanno seguita per questo fine i primi Autori, ma ad un simile calcolo di somma lunghezza, e di un estremo fastidio, hanno i Matematici posteriori sostituito l' uso delle serie, e di alcuni artifizj, col mezzo de' quali truovansi i logaritmi con una prestezza, e facilità di gran lunga maggiore.

III. Nella determinazione dei logaritmi mediante le serie, basterà cercar quelli de' numeri primi; perchè conosciuti questi, sarà assai facile pel (*n.*° 145) il truovare i logaritmi de' numeri composti, delle frazioni, delle potenze, e dei radicali. Affine per esempio di avere i logaritmi de' numeri 15, 125, $\frac{7}{2}$, $\sqrt{11}$, basta conoscere i logaritmi de' numeri 3, 5, 7, 2, 11, giacchè

$\log. 15 = \log. 3 + \log. 5$, $\log. 125 = 3 \log. 5$, $\log. \frac{7}{2} = \log. 7 - \log. 2$, $\log. \sqrt{11} = \frac{\log. 11}{2}$.

IV. Nel sistema volgare non vi ponno essere evidentemente altri numeri razionali, i quali abbiano de' numeri razionali per logaritmi, se non che le potenze esatte del 10 avendosi così $\log. 1 = 0$, $\log. 10 = 1$, $\log. 100 = 2$, $\log. 1000 = 3$, ec. $\log. \frac{1}{10} = -1$, $\log. \frac{1}{100} = -2$, $\log. \frac{1}{1000} = -3$, ec., e in generale $\log. 10^{\pm r} = \pm r$. I logaritmi degli altri numeri razionali, essendo quantità trascendenti (II. *n.*° 162), ed il loro valore dovendosi perciò ricercare per approssimazione; sarà bene il determinar quelle serie (*prec.* III), le quali sono più utili all' intento; giacchè le determinate nei (*n.*ⁱ 154, 155) si accostano di sovente con troppa lentezza ai valori richiesti.

V. Col mezzo ancora delle frazioni continue (*n.*° 117. *Alg.*) potremo accostarci quanto si vuole al valore del logaritmo di un dato numero, quando esso logaritmo non è intero. Sia difatti $x' > 1$ il dato numero, y' il suo logaritmo, e poichè y' non è intero, chiamato α il massimo numero intero, che in esso si contiene, sia $y' = \alpha + \frac{1}{p}$, dovrà il denominatore p essere > 1, ed a cagione di $x' > 1$, dovrà essere positivo, ed avremo $x' = 10^{\alpha + \frac{1}{p}} = 10^{\alpha} \times 10^{\frac{1}{p}}$. Si supponga $\frac{x'}{10^{\alpha}} = b$, ne verrà $b^{p} = 10$, e siccome si ha $p > 1$, facciasi $p = \beta + \frac{1}{q}$, essendo β il massimo intero, che si contiene in p; sarà β non < 1, $q > 1$, ed avremo $10 = b^{\beta} \times b^{\frac{1}{q}}$. Si faccia $\frac{10}{b^{\beta}} = c$; risultando $c^{q} = b$,

ed essendo $q>1$, posto $q=\gamma+\frac{1}{r}$, ove γ sia l'intero massimo, che esiste in q, ed ove $r>1$, otterremo $b=c^{\gamma}\times c^{\frac{1}{r}}$, e fatto $\frac{b}{c^{\gamma}}=d$, sarà $d^{r}=c$.

Posto nuovamente $r=\delta+\frac{1}{s}$, sostituito, e fatto $\frac{c}{d^{\delta}}=e$, otterremo $e^{s}=d$, e così potrà proseguirsi quanto si vuole. Conoscendosi il numero x', e la base 10, è chiaro, che si potranno conoscere successivamente tutti i quoti b, c, d, ec. e quindi gl'interi α, β, γ, δ, ec., onde con la successiva sostituzione otterremo

$$y'=\alpha+\frac{1}{p}=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{q}}=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{r}}}=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\text{ec.}}}}\ \text{ec.}$$

Se sia $x'<1$; allora, supposto $\frac{1}{x'}=z'$, cercherò nella stessa guisa il valore di y' nella $z'=10^{y'}$, e cangiato poscia il segno al valore, che si ricava, esso sarà il logaritmo di x'. Con lo stesso metodo si potranno cercare i logaritmi anche in un altro sistema qualunque $x=m^{y}$.

166. *Scol.* 3o.° I. Si ponga nella terza delle serie (LXII) $-x$ invece di x, e si sottragga dalla serie medesima il risultato

$L(1-x)=k\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\text{ec.}\right)$, che ne viene, e giacchè $L(1+x)-L(1-x)=L\frac{1+x}{1-x}$, otterremo

$$L\,\frac{1+x}{1-x}=2k\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\text{ec.},\right),$$

e supposto $\frac{1+x}{1-x}=z$; onde $x=\frac{z-1}{z+1}$, ne verrà

$$Lz=2k\left(\frac{z-1}{z+1}+\frac{(z-1)^3}{3(z+1)^3}+\frac{(z-1)^5}{5(z+1)^5}+\frac{(z-1)^7}{7(z+1)^7}+\text{ec.}\right). \qquad \text{(LXV)}$$

II. Si faccia $\frac{1+x}{1-x}=\frac{z}{n}$, venendone $x=\frac{z-n}{z+n}$, risulterà

$$Lz=Ln+2k\left(\frac{z-n}{z+n}+\frac{(z-n)^3}{3(z+n)^3}+\frac{(z-n)^5}{5(z+n)^5}+\frac{(z-n)^7}{7(z+n)^7}+\text{ec.}\right) \qquad \text{(LXVI)}$$

Ponendo poi $k=1$ (II. n.° 157), si avrà

$$lz=2\left(\frac{z-1}{z+1}+\frac{(z-1)^3}{3(z+1)^3}+\frac{(z-1)^5}{5(z+1)^5}+\frac{(z-1)^7}{7(z+1)^7}+\text{ec.}\right)$$

$$lz=ln+2\left(\frac{z-n}{z+n}+\frac{(z-n)^3}{3(z+n)^3}+\frac{(z-n)^5}{5(z+n)^5}+\frac{(z-n)^7}{7(z+n)^7}+\text{ec.}\right) \qquad \text{(LXVII)}$$

Ogniqualvolta sia $z>1$, ed $n<z$, e >0, le serie ora truovate sono sempre convergenti, e quanto meno n differisce da z, la convergenza diviene tanto maggiore.

167. *Probl.* 23.° Vogliansi i logaritmi de' primi dieci numeri.

Sol. Conosciamo già i logaritmi de'numeri 1, 10. Per determinare quegli degli altri 2, 3, ec. 9, potrei sostituire questi numeri successivamente nella (LXV) in luogo della z, e calcolare in essa tanti termini, quanti sono neccessarj all' approssimazione, che si domanda; giovando però il cercare di accostarci al vero valore il più rapidamente, che sia possibile, perchè così si deve calcolare un numero minore di termini; supporrò invece z successivamente $=\frac{10}{8}, \frac{20}{18}, \frac{30}{28}$; avendosi quindi in corrispondenza $\frac{z-1}{z+1}=\frac{1}{9}, \frac{1}{19}, \frac{1}{29}$, risulterà $\log.\frac{10}{8}=2k\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^7}+\text{ec.}\right)$,

$$\log.\frac{20}{18} = 2k\left(\frac{1}{19} + \frac{1}{3.19^3} + \frac{1}{5.19^5} + \frac{1}{7.19^7} + \text{ec.}\right);$$

$$\log.\frac{30}{28} = 2k\left(\frac{1}{29} + \frac{1}{3.29^3} + \frac{1}{5.29^5} + \frac{1}{7.29^7} + \text{ec.}\right),$$

serie tutte e tre assai convergenti. Calcolati ora in queste un sufficiente numero di termini, e chiamati per brevità A, B, C, i risultati, sarà $\log.\frac{10}{8} = A$, $\log.\frac{20}{18} = B$, $\log.\frac{30}{28} = C$; ma $\log.\frac{10}{8} =$ $\log.10 - \log.8 = 1 - 3\log.2$, $\log.\frac{20}{18} = \log.\frac{10}{9} = 1 - 2\log.3$, $\log.\frac{30}{28} = 1 + \log.3 - \log.7 - 2\log.2$. Dunque essendo $1 - 3\log.2 = A$, $1 - 2\log.3 = B$, $1 + \log.3 - \log.7 - 2\log.2 = C$, considero log. 2, log. 3, log. 7 come tre incognite, ne determino col mezzo della eliminazione il valore, e posti invece delle A, B, C i dovuti valori, avremo

$$\log.2 = 0,30102999566398119521,$$
$$\log.3 = 0,47712125471966243730,$$
$$\log.7 = 0,84509804001425683071.$$

Ma $\log.4 = 2\log.2$, $\log.6 = \log.2 + \log.3$, $\log.5 = 1 - \log.2$, $\log.8 = 3\log.2$, $\log.9 = 2\log.3$. Dunque sostituendo otterremo

$$\log.4 = 0,60205999132796239043,$$
$$\log.5 = 0,69897000433601880479,$$
$$\log.6 = 0,77815125038364363251,$$
$$\log.8 = 0,90308998699194358564,$$
$$\log.9 = 0,95424250943932487459.$$

168. *Scol.* 31.° I. Proseguendo a cercare i logaritmi de' numeri interi maggiori del 10 con la maggiore convergenza, rappresenti p un numero primo qualunque, e siano già cogniti i logaritmi dei numeri interi di lui minori, avrò perciò noti

log. $(p-1)$, log. $(p+1)$, log. (p^2-1); imperocchè essendo $p+1$ numero pari, e quindi $\frac{p+1}{2}$ numero intero, si conosce log. $\frac{p+1}{2}$, e però log. $(p+1)$ $=$ log. $2+$ log. $\frac{p+1}{2}$, ed essendo $p^2-1=(p-1)(p+1)$, si ha log. $(p^2-1)=$ log. $(p-1)+$ log. $(p+1)$. Ciò posto si faccia nella (LXV) $z=\frac{p^2}{p^2-1}$, e però $\frac{z-1}{z+2}=\frac{1}{2p^2-1}$, avremo

$$\log.\frac{p^2}{p^2-1}=2k\left(\frac{1}{(2p^2-1)}+\frac{1}{3(2p^2-1)^3}+\text{ec.}\right).\qquad\text{(LXVIII)}$$

Ora chiamato A il valore della serie, cosicchè log. $\frac{p^2}{p^2-1}=A$, osservo, che log. $\frac{p^2}{p^2-1}=2\log.p-$ log. (p^2-1). Dunque avendosi $\log.p=\frac{A+\log(p^2-1)}{2}$, ed essendo la serie (LXVIII), mentre si faccia $p>10$, moltissimo convergente, potremo col suo mezzo ottenere i logaritmi domandati senza eseguire un calcolo troppo prolisso.

II. Si voglia il logaritmo di 29, e vogliasi questo esatto fino alla decima cifra decimale. Fatto perciò $p=29$, onde $\frac{1}{2p^2-1}=\frac{1}{1681}$, $\frac{1}{3(2p^2-1)^3}=\frac{1}{14250312723}$, ec. riduco in decimali; ma quindi risulta

$\frac{1}{1681}=0{,}000594883399$, $\frac{1}{14250312723}=0{,}00000000007$;

dunque non esigendosi il lagaritmo esatto, che sino alla decima cifra, basterà nelle serie tener conto del solo primo termine, ed avremo

$$\log.\frac{p^2}{p^2-1}=2k\times0{,}0005948840=0{,}8685889638\times0{,}$$

0005948840 (I. *n.*° 165) = 0 , 0005167097 = A (*prec.* I) ; si è per maggior esattezza aggiunta un' unità all' undecima cifra 9 del valore decimale del termine $\frac{1}{1681}$. Ora $\log. p = \frac{A + \log.(p^2 - 1)}{2}$

$= \frac{A + \log.(p-1) + \log.(p+1)}{2}$. Dunque avremo

$\log. 29 = \frac{0,0005167097 + \log. 28 + \log. 30}{2} =$

$\frac{0,0005167097 + 1.4 + 1.7 + 1 + 1.3}{2} = 1,4623979979$ (*n.*° 167).

Per ottenere con la stessa esattezza i logaritmi de' numeri inferiori al 29, fino allo 11 inclusivamente, basterà nella (LXVIII) calcolare, i due soli primi termini.

III. Se calcolando il solo primo termine della (LXVIII) ottienesi con l' indicata esattezza il logaritmo di 29, molto più con l' esattezza medesima si otterranno i logaritmi de' numeri > 29. Anzi giunti essendo al 751 si potrà ricavare il logaritmo di questo numero, e degli altri ad esso superiori, calcolando il primo termine di una serie più semplice della precedente. Tal serie è la seguente

$$\text{(LXIX)} \quad \log. \frac{p}{p-1} = 2k\left(\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{3(2p-1)^3} + \text{ec.}\right)$$

nata dal supporre nella (LXV) $z = \frac{p}{p-1}$. Fatto anche in questa $2k \times \frac{1}{2p-1} = A$, avremo l' Equazione $\log. p = A + \log. (p-1)$ prossimamente esatta fino alla decima cifra, mentre sia p non < 751.

IV. Le esposte sono le serie, onde ottenere per approssimazione i logaritmi di tutti i numeri interi, e quindi onde formare le Tavole, vengono allo stesso fine proposte eziandio altre serie; ma le precedenti sono abbastanza semplici, e comode all' intento.

169. *Def.* 19.ª Alla parte intera del decimale, che costituisce il logaritmo, si dà il nome di *Caratteristica*, e quello di *Mantissa* alla parte fratta.

170. *Scol.* 32.° I. È facile a vedersi, che i numeri, i quali si estendono dallo 1 fino esclusivamente al 10 hanno per caratteristica lo zero; quelli, che si estendono dal 10 fino esclusivamente al 100, hanno per caratteristica l'unità: la caratteristica de' numeri compresi dal 100 fino esclusivamente al 1000 è il 2; e così di seguito. Dunque le caratteristiche de' logaritmi corrispondenti ai numeri interi contengono sempre tante unità meno una, quante cifre si contengono nei numeri medesimi; e nelle caratteristiche de' logaritmi delle frazioni spurie esistono tante unità meno una, quante cifre si contengono nelle loro parti intere.

II. Pertanto dato un qualunque numero razionale non <1, si troverà tosto la caratteristica del suo logaritmo; e viceversa data la caratteristica di un logaritmo, si conoscerà immediatamente di quante cifre è composta la parte intera del numero corrispondente, e quindi entro quei limiti esso sia posto. Egli è da ciò, che si è dato tal nome alla parte intera del logaritmo, ed è pur anche da ciò, che essa nelle Tavole viene attualmente soppressa.

171. *Scol.* 33.° I. Supponghasi nella (LXV.)
$z=\frac{a+b}{a}$, ove a esprima un'intero non <751, e b una frazione vera qualunque; ne verrà,

$$\log.\frac{a+b}{a}=2k\left(\frac{b}{2a+b}+\frac{b^3}{3(2a+b)^3}+\text{ec.}\right). \qquad \text{(LXX)}$$

Si faccia nella stessa (LXV) $z=\frac{a+1}{a}$, risulterà

$$\log.\frac{a+1}{a}=2k\left(\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{3(2a+1)^3}+\text{ec.}\right). \qquad \text{(LXXI)}$$

Ora riducendo allo stesso denominatore le due frazioni

$\frac{b}{2a+b}$, $\frac{1}{2a+1}$; ne viene $\frac{b}{2a+b} = \frac{2ab+b}{(2a+1)(2a+b)}$, $\frac{1}{2a+1} = \frac{2a+b}{(2a+1)(2a+b)}$. Dunque, giacchè si ha $b<1$, e quindi $2ab+b<2a+b$, sarà ancora $\frac{b}{2a+b} < \frac{1}{2a+1}$, e per conseguenza la serie (LXX) sarà più convergente verso il proprio valore di quello che sia la (LXXI); ma per essere a non <75, l'Equazione $\log.\frac{a+1}{a} = \frac{2k}{2a+1}$ è esatta fino alla decima cifra, esatta per conseguenza quanto ordinariamente si richiede dalla pratica, dunque tale sarà ancora la Equazione $\log.\frac{a+b}{a} = \frac{2kb}{2a+b}$. Pertanto avremo

$$\log.\frac{a+1}{a} : \log.\frac{a+b}{a} :: \frac{2k}{2a+1} : \frac{2kb}{2a+b} :: 1 : b + \frac{b-b^2}{2a+b};$$

ma essendo $b : \frac{b-b^2}{2a+b} :: 2a+b : 1-b$, ed essendo $1-b$ quantità minima rapporto alla $2a+b$, tale è ancora $\frac{b-b^2}{2a+b}$ riguardo a b. Dunque trascurato questo rotto nella precedente proporzione, avremo prossimamente.

(LXXII) $\log.\frac{a+1}{a} : \log.\frac{a+b}{a} :: 1 : b$, e però

$1 : b :: \log.(a+1) - \log. a : \log.(a+b) - \log. a$,

d'onde

$\log.(a+b) = b(\log.(a+1) - \log. a) + \log. a$,

$b = \frac{\log.(a+b) - \log. a}{\log.(a+1) - \log. a}$.

II. Mediante la proporzione (LXXII), e le successive due Equazioni, potremo, dato un numero non contenuto nelle Tavole, o perchè fratto, o perchè superiore al massimo delle Tavole medesime,

me, potremo, dissi, trovare il logaritmo corrispondente; e viceversa dato un logaritmo non esistente nelle Tavole, potremo trovarne per approssimazione il numero che gli appartiene. Ma la pratica attuale di queste determinazioni, come pure la natura, e l'uso del così detto *Complemento aritmetico* vengono esposti nelle Nozioni preliminari alle Tavole. Noi piuttosto esporremo brevemente la soluzione di qualche Quesito dipendente dai logaritmi.

172. *Esem.* 1.° Un Usurajo pone un suo Capitale a ad un frutto, od interesse composto ad h per uno, e ve lo lascia per un tempo t, accumulando sempre capitale, e frutti. Dopo questo tempo Egli truova di aver ridotto a b il proprio capitale. Cercasi l'Equazione corrispondente.

Sol. Affine di risolvere il Problema con la dovuta generalità, si osservi, che essendo contratto d'interesse composto, quel contratto illecito, nel quale si vuole, che non solamente il Capitale, ma anche i frutti, che se ne ottengono, producano nuovi frutti, si osservi, dissi, che conviene distinguere due generi di tale interesse, l'uno, che dicesi *discreto*, nel quale ciascun frutto non produce nuovo frutto, se non dopo una determinata unità di tempo finita, per es. dopo un anno, e l'altro, che si appella *continuo*, nel quale non solo il Capitale, ma anche i frutti producono sempre ad ogni istante nuovi frutti. Ciò posto.

I. Abbia luogo il primo degli accennati interessi, e preso per unità di tempo un anno sia

$t = n + \frac{1}{m}$, essendo n, m due interi > 0, ed n

il numero degli anni. Al fine del primo anno, essendo, per la ipotesi fatta, ah il frutto del capitale a, per l'anno secondo il capitale sarà divenuto $a + ah = a(1 + h)$. Chiamato questo a', nel fi-

ne dell' anno primo sarà esso divenuto $a'(1+h)$; così posto $a'(1+h)=a''$, $a''(1+h)=a'''$, $a'''(1+h)=a^{\mathrm{iv}}$, ec. $a^{(n-1)}(1+h)=a^{(n)}$, le a'', a''', a^{iv}, ec. $a^{(n)}$ esprimeranno ciocchè il capitale è diventato rispettivamente nel fine degli anni secondo, terzo, quarto ec. *nesimo*. Ora sostituendo successivamente, si ottiene $a'=a(1+h)$, $a''=a(1+h)^2$, $a'''=a(1+h)^3$, $a^{\mathrm{iv}}=a(1+h)^4$, ec. $a^{(n)}=a(1+h)^n$. Dunque essendo $\frac{a^{(n)}h}{m}$ ciò, che nella frazione di tempo $\frac{1}{m}$ frutta il capitale $a^{(n)}$ al fine del tempo supposto $n+\frac{1}{m}$, $a^{(n)}+\frac{a^{(n)}h}{m}=a(1+h)^n\left(1+\frac{h}{m}\right)$ sarà il valore acquistato dal capitale; ma tal valore è $=b$. Dunque

(LXXVIII) $a(1+h)^n\left(1+\frac{h}{m}\right)=b$ sarà in questo primo caso l'Equazione domandata.

II. Il supposto interesse sia continuo. In tale ipotesi, chiamato i il frutto del Capitale 1 in un istante, denominato p il numero degl'istanti, che si contengono in un anno, e ritenuto, come nel (*prec.* I), $n+\frac{1}{m}$ il numero degli anni, in cui il capitale rimane a frutto, cosicchè preso in questo caso l' istante come unità di tempo si abbia $t=pn+\frac{p}{m}$; troveremo nel modo stesso del (*prec.* I), che al fine del primo anno il capitale sarà divenuto $a(1+i)^p$, e al fine del tempo t sarà divenuto

$a(1+i)^t = a(1+i)^{np+\frac{p}{m}} = a((1+i)^p)^{n+\frac{1}{m}}$. Ora, sviluppata la potenza $(1+i)^p$, suppongasi $pi + \frac{p(p+1)}{2} i^2$ + ec. $= h$; risultando da ciò $(1+i)^p = 1+h$ avremo $a(1+i)^p - a = ah$; ma $a(1+i)^p - a$ altro non è evidentemente che il frutto totale che si è ricavato al fine del primo anno. Dunque tal frutto venendo espresso eziandio dal prodotto ah, ne segue, che h rappresenterà, come nel (*prec.* I), il frutto totale del capitale 1 al fine dell'anno primo, e poichè con la sostituzione si ottiene $a(1+i)^t = a(1+h)^{n+\frac{1}{m}}$, ne segue che stabilito già l'indicato frutto h del primo anno l' Equazione richiesta sarà

$$a(1+h)^{n+\frac{1}{m}} = b. \qquad \text{(LXXIV)}$$

173. *Scol.* 34.° Le Equazioni (LXXIII), (LXXIV) ora truovate ci serviranno alla soluzione di molti fra i Quesiti, che si sogliono proporre d' interesse composto. Difatti.

I. Se dato il capitale a, il frutto h del primo anno, ed il tempo $t = n + \frac{1}{m}$ si cerchi qual sia l'ultimo risultato b, oppure se dato questo b, dati t, ed h, si cerchi il primo capitale a, le due (LXXIII), (LXXIV) somministreranno tosto i valori domandati.

II. Date le quantità a, b, h, si domanda il tempo $t = n + \frac{1}{m}$. Sia in primo luogo l'interesse composto continuo, e presa quindi la Equazione

(LXXIV), ossia la $a(1+h)^t = b$, passo in essa dai numeri ai logaritmi. Risultando da ciò $\log. a(1+h)^t = \log. b$, ed essendo $\log. a(1+h)^t = \log. a + t \log.(1+h)$, otterremo $t = n + \frac{1}{m} = \frac{\log b - \log. a}{\log.(1+h)}$. Cerco dalle Tavole $\log. a$, $\log. b$, $\log.(1+h)$, sostituisco, ed effettuata la divisione, ci risulterà il chiesto valore del tempo, e però la sua parte intera n, e la fratta $\frac{1}{m}$.

Sia in secondo luogo l'interesse discreto. Considero, anche in questo caso, tale interesse come se fosse continuo, e supposta l'Equazione $a(1+h)^{n+\frac{1}{p}} = b$, truovo come precedentemente la parte intera n del tempo, e la parte fratta $\frac{1}{p}$. Ora l'Equazione, a cui conduce il Problema preso nel suo vero aspetto, è la $a(1+h)^n \left(1 + \frac{h}{m}\right) = b$, e frattanto l'intero n è lo stesso in amenduo i casi (n.° 172). Dunque avendosi $a(1+h)^{n+\frac{1}{p}} = a(1+h)^n \left(1 + \frac{h}{m}\right)$, risulterà $(1+h)^{\frac{1}{p}} = 1 + \frac{h}{m}$, e però $\frac{1}{m} = \frac{\sqrt[p]{(1+h)} - 1}{h}$; ma n, e p sono numeri già determinati. Dunque ec.

III. La precedente riduzione dell'Equazione (LXXIV) alla $\log. a + \left(n + \frac{1}{m}\right) \log.(1+h) = \log. b$,

e la riduzione fatta nello stesso modo della (LXXIII) alla $\log . a + n \log . (1+h) + \log . (m+h) - \log . m = \log . b$ potranno nel caso di t grande, agevolare di molto il calcolo per la soluzione del Problema proposto nel (*prec.* I). Imperciocchè, truovato con l' ajuto delle Tavole, e col mezzo delle esposte due Equazioni il valore di $\log . b$, oppure quello di $\log . a$, secondochè si cerca l' ultimo risultato b, oppure il primo capitale a, potremo tosto da questo valore logaritmico dedurre, mediante le Tavole medesime, il corrispondente valore di b, o di a.

IV. Cogniti finalmente i valori a, b, t si voglia il valore di h. Quando l'interesse è continuo dedotta dalla (LXXIV) la $\log . (1+h) = \frac{\log . b - \log . a}{t}$, conoscerò il valore di $\log . (1+h)$, e da questo col mezzo delle Tavole si ritrarrà il valore di $1+h$, e però quello di h.

Che se l' interesse è discreto; poichè si ha $n \log . (1+h) + \log . (1+\frac{h}{m}) = \log . b - \log . a$, poichè $\log . (1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \text{ec.}$, $\log . (1+\frac{h}{m}) = \frac{h}{m} - \frac{h^2}{2m^2} + \text{ec.}$, e poichè finalmente h per essere il frutto del capitale 1, ponesi di un valore notabilmente inferiore all' unità, onde amendue le serie trovate sono convergenti; terrò nelle indicate serie conto solamente dei primi due termini, e fattane la sostituzione, si avrà prossimamente $n(h - \frac{h^2}{2}) + \frac{h}{m} - \frac{h^2}{2m^2} = \log . b - \log . a$, e però $h^2 - \frac{2m(mn+1)h}{m^2n+1} = \frac{2m^2}{m^2n+1} (\log . a - \log . b)$, Equazione in h del secondo grado, dalla cui soluzione si otterrà prossimamente il chiesto valore di h. Se si volesse un'

approssimazione maggiore, si potrebbe nelle serie $h - \frac{h^2}{2} +$ ec., $\frac{h}{m} - \frac{h^2}{2m^2}$ + ec. tener conto anche dei termini $\frac{h^3}{3}$, $\frac{h^3}{3m^3}$; oppure di questi, e inoltre degli altri $-\frac{h^4}{4}$, $-\frac{h^4}{4m^4}$; ma ciò facendo risulterebbe per h un' Equazione in corrispondenza di 3°, o di 4.° grado. Che se nelle solite serie non si fosse tenuto conto che del primo termine; allora per h sarebbe con minore approssimazione, ma però con semplicità maggiore risultato $h = \frac{m(\log b - \log a)}{mn + 1}$.

Se si fosse supposto t uguale semplicemente all' intero n: allora avendosi $\frac{1}{m} = o$, il Quesito si risolverà come nel caso dell' interesse continuo, risultando $\log.(1+h) = \frac{\log.b - \log.a}{n}$.

V. Dei due interessi composti cercasi, se sia più lucroso il continuo, od il discreto. Poste perciò uguali tanto nell' uno, come nell' altro le quantità a, h, n, m, e chiamato b l' ultimo risultato nell' interesse continuo, e B nel discreto, per le (LXXIII), (LXXIV) avremo $b : \mathrm{B} :: a(1+h)^{n+\frac{1}{m}} : a(1+h)^{n}(1+\frac{h}{m})$ $:: (1+h)^{\frac{1}{m}} : 1 + \frac{h}{m}$, e supposto $m = \frac{q}{p}$, ove $q > p$, avremo $b : \mathrm{B} :: (1+h)^{\frac{p}{q}} : 1 + \frac{ph}{q} ::$ $\sqrt[q]{(1+h)^p} : \sqrt[q]{(1+\frac{ph}{q})^q} :: \sqrt[q]{(1 + ph + \frac{p(p-1)}{2}h^2 +}$ ec. +

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-\pi+1)}{1.2.3\ldots\pi}h^{\pi}+\text{ec.}):\sqrt[q]{}\left(1+ph+\frac{q(q-1)}{2q}p^2h^2\right.$$

$$\left.+\text{ec.}+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)\ldots(q-\pi+1)}{(1.2.3\ldots\pi.q^{\pi}}p^{\pi}h^{\pi}+\text{ec.}\right)$$

$$::\sqrt[q]{}\left(1+ph+\frac{pq(pq-q)h^2}{2q^2}+\text{ec.}+\right.$$

$$\left.\frac{pq(pq-q)(pq-2q)\ldots(pq-(\pi-1)q)h^{\pi}}{1.2.3\ldots\pi q^{\pi}}+\text{ec.}\right):\sqrt[q]{}\left(1+ph+\right.$$

$$\left.\frac{pq(pq-p)h^2}{2q^2}+\text{ec.}+\frac{pq(pq-p)(pq-2p)\ldots(pq-(\pi-1)ph^{\pi}}{1.2.3\ldots\pi_{\prime}^{\pi}}+\text{ec.}\right).$$

Ora a cagione di $p<q$, e però di $pq-q<pq-p$, $pq-2q<pq-2p$, ec., $pq-(\pi-1)q<pq-(\pi-1)p$ si ha il termine generale $\frac{pq(pq-q)(pq-2q)\ldots(pq-(\pi-1)q)h^{\pi}}{1.2.3\ldots\pi q^{\pi}}$ $<\frac{pq(pq-p)(pq-2p)\ldots(pq-(\pi-1)p)h^{\pi}}{1.2.3\ldots\pi q^{\pi}}$. Dunque ciascun termine del primo degli esposti radicali *qesimi*, a riserva dei primi due, essendo minore di ciascuno corrispondente nel radicale secondo, e di più il numero de' termini in quest'ultimo superando il numero de' termini nel primo; ne segue, che quello sarà minore di questo; e per conseguenza risultando $b<B$ sarà meno lucroso l'interesse composto continuo di quel che sia il discreto. Però quando sia t numero intero, i due interessi sono uguali.

174. *Esem.* 2.° Tizio ha presso di Cajo un Capitale a, da cui ricava ad interesse semplice un frutto annuo di h per 1. Vorrebbe egli nel corso di n anni estinguere il suo credito, ritirando tra capitale, e frutto un egual porzione in ciascun an-

no. Cercasi quanta debba essere quest' annua porzione.

Sol. Chiamata essa x, siccome deve Tizio ritirare nel primo anno il frutto ah, ritirerà la parte $x-ah$ di capitale, e il capitale, che gli rimarrà presso Cajo sarà $a-x+ah=a(1+h)-x$. Denominato a' questo valore, $a'h$ sarà il frutto, che gli si deve al fine dell'anno secondo, ed estinguendo egli per conseguenza in tale anno la porzione $x-a'h$ di Capitale, rimarrà creditore dell'altra $a'-x+a'h$ $=a'(1+h)-x$, che dirò a''. Nella maniera medesima chiamate a''', a^{iv}, ec. $a^{(n)}$ le parti di capitale, che restano successivamente in mano di Cajo dopo gli anni terzo, quarto, ec. *nesimo*, truoveremo dover essere $a'''=a''(1+h)-x$, $a^{iv}=a'''(1+h)-x$, ec. $a^{(n)}=a^{(n-1)}(1+h)-x$. Faccio le successive sostituzioni, e risulterà

$$a'=a(1+h)-x,$$
$$a''=a(1+h)^2-x(1+h)-x,$$
$$a'''=a(1+h)^3-x(1+h)^2-x(1+h)-x,$$
$$a^{iv}=a(1+h)^4-x(1+h)^3-x(1+h)^2-x(1+h)-x,$$

ec.

$$a^{(n)}=a(1+h)^{n}-x(1+h)^{n-1}-x(1+h)^{n-2}-\text{ec.}-x(1+h)-x.$$

Ora per le condizioni del Problema deve essere $a^{(n)}=0$, e per la natura delle serie geometriche abbiamo $(1+h)^{n}+(1+h)^{n-1}+(1+h)^{n-2}+\text{ec.}+(1+h)+1$ $=\frac{(1+h)^{n}-1}{h}$. Dunque avendosi $a(1+h)^{n}-\left(\frac{(1+h)^{n}-1}{h}\right)x=0$, sarà $x=\frac{ah(1+h)^{n}}{(1+h)^{n}-1}$ la domandata annua pensione.

175. *Scol.* 35.° Nel Problema ora proposto se invece della x si fosse posto incognito il numero n degli anni, sarebbeci risultato $n = \frac{\log x - \log.(x - ah)}{\log.(1+h)}$; e se si fosse considerato incognito il valore di h, operando come nel (IV. *n.*° 173) e tenendo conto nelle serie fino alla terza potenza di h, avrebbesi ottenuta l' Equazione $\frac{nx^3 - a^3}{3x^3} h^2 - \frac{nx^2 - a^2}{2x^2} h + \frac{nx - a}{x} = 0$, dalla cui soluzione sarebbesi ricavato prossimamente il valore cercato.

176. *Esemp.* 3.° Nella supposizione, che nel corso di soli 600 anni dal Diluvio possa essersi la Terra popolata nel modo stesso, in cui lo è presentemente, cercasi in qual ragione avrebbe dovuto la popolazione aumentarsi annualmente.

Sol. Il numero totale degli uomini sulla Terra si calcola, che di presente ascenda a 700, 000, 000 (*)

Dunque dalle 6 persone, che sole rimasero dopo il Diluvio a popolare la Terra, avrà dovuto nella nostra ipotesi con le successive generazioni prodursi nel corso di 600 anni l' indicato numero 700, 000, 000 di viventi, e ponendo, che nell' accennato tempo altrettanti siano stati i morti, avran dovuto nascere 1400000000 di uomini. Ciò posto sia $1 : h$ la ragion domandata dell' aumento di popolazione, cosicchè chiamata A tale popolazione al principio di un anno, essa al fine dell' anno medesimo divenga $A + Ah = A(1+h)$. In conseguenza di ciò le 6 sovraindicate persone al fine del primo anno saran divenute $6(1+h)$, al fine del se-

(*) Lesage Atlas historique chronologique geographique, et généalogique. Florence Chez Molini Landi 1806. Carte supplementaire du Mappemonde.

condo $6(1+h)^2$, e così proseguendo, come nel (*n.*° 172), al fine dell' anno 600*esimo* saran diventate $6(1+h)^{600}$, e avrem quindi l' Equazione $6(1+h)^{600} = 1400{,}000{,}000$. Cercando ora il valore di h, passo dai numeri ai logaritmi, e truovato $\log.(1+h) = \frac{1}{600}(\log.1400{,}000{,}000 - \log.6)$, siccome dalle Tavole si ha $\log.1400,000,000 = 9,1461280$, $\log.6 = 0,7781512$, otterremo $\log.(1+h) = \frac{1}{600} \times 8{,}3679768 = 0{,}0139466$, e passando dai logaritmi ai numeri, si truoverà $1+h = \frac{1032634}{1000000}$, e però $h = \frac{32634}{1000000} = \cfrac{1}{30 + \cfrac{21080}{32634}}$ prossimamente $< \frac{1}{30}$.

Dunque affinchè la popolazione del Mondo fosse diventata quale abbiamo supposta, bastava, che essa crescesse ogni anno di $\frac{1}{30}$, cioè in ciascun anno per ogni trenta persone se ne accrescesse una. Siccome il rapporto ora determinato è assai discreto specialmente presso quei primi abitatori della Terra, i quali per la loro vita più semplice, erano di noi più robusti, e però più fecondi; e siccome nell' epoca da noi stabilita la popolazion della Terra non era certamente così grande, come si è supposto presentemente; quindi apparisce quanto sia assurda l' obbiezione di coloro, i quali per opporsi alle Sagre Carte asseriscono non essere possibile, che da sei sole Persone siansi prodotte quelle popolazioni, che dalla Sacra Scrittura vengono accennate.

177. *Esem.* 4.° Essendo D la densità dell' aria

contenuta sotto la campana di una macchina pneumatica; cercasi dopo quante esantlazioni potrà tal aria ridursi alla densità d.

Sol. Chiamata a la capacità della campana, e b quella del tubo, per cui scorre lo stantuffo della macchina; e chiamate D', D'', D''' ec. le densità dell' aria sotto la campana dopo la prima, la seconda, la terza esantlazione, ec., ed x il numero delle esantlazioni supposte; osservo, che la quantità dell' aria a principio è aD, e che, ritirato lo stantuffo, essa deve occupare lo spazio $a+b$, diradandosi perciò, e acquistando così la densità D'. Dunque tal quantità essendo ancora $=(a+b)\,D'$, avremo l' Equazione $(a+b)\,D'=a\,D$, donde $D'=\frac{aD}{a+b}$. Rimesso lo stantuffo alla prima posizione, aD' sarà la quantità dell' aria esistente sotto la campana; dunque rinnovato il precedente discorso, vedremo, che dalla seconda esantlazione si avrà $D''=\frac{aD'}{a+b}$: in egual modo dalla terza $D'''=\frac{aD''}{a+b}$, dalla quarta $D^{IV}=\frac{aD'''}{a+b}$, e così di seguito. Dunque con le successive sostituzioni truovandosi $D'=\frac{aD}{a+b}$, $D''=\frac{a^2D}{(a+b)^2}$, $D'''=\frac{a^3D}{(a+b)^3}$, ec. la $\frac{a^xD}{(a+b)^x}$ esprimerà la densità dell' aria dopo la x*esima* esantlazione, e però avremo $\frac{a^xD}{(a+b)^x}=d$. Ora per risolvere questa Equazione la riduco alla $\left(\frac{a+b}{a}\right)^x=\frac{D}{d}$, passo ai logaritmi, e otterrassi pel valore richiesto $x=\frac{\log.D-\log.d}{\log.(a+b)-\log a}$.

Molti altri sono i Problemi simili agli esposti, la cui soluzione o dipende, o si facilita dai logaritmi; ma l' esposizione dei precedenti è sufficiente ad indicare come dobbiamo regolarci negli altri.

FINE.

INDICE

PARTE PRIMA

Delle prime Applicazioni dell' Algebra alla Geometria.

CAPO I.

Dei Luoghi geometrici determinati di 1.° grado, e della costruzione delle Equazioni di 1.° grado

CAPO II.

Della soluzione de' Problemi geometrici determinati di 1.° grado.

CAPO III.

Dei luoghi geometrici determinati di 2.° grado, e della costruzione delle Equazioni determinate di 2.° grado.

CAPO IV.

Della soluzione dei Problemi geometrici determinati di 2.° grado

CAPO V.

Delle Equazioni indeterminate a due variabili applicate alla Geometria, e delle Linea del 1.° ordine.

CAPO VI.

Della Risoluzione dei Problemi geometrici indeterminati dipendenti soltanto dalla linea retta, e dal circolo.

PARTE SECONDA

Delle serie algebraiche, e delle Geometriche.

CAPO I.

Delle serie in generale, e delle serie aritmetiche.

CAPO II.

Delle serie Algebraiche.

Pro-

CAPO III.

Dei Numeri poligoni, e dei figurati, delle serie geometriche e delle armoniche.

CAPO IV.

Dei Logaritmi.

FINE.

ERRORI			CORREZIONI
Pag.	lin.		
4	17	PF	PT
12	8	CF . . . ED	EF . . . CD
29	20	a	x
32	8, 20	HFL	fFL
34	25	EF $= x$	EF $= 2c$
38	16	$\frac{a(c+x)}{x}$	$\frac{a'c-x)}{x}$
	17	$\frac{(a+m''')x-ac}{a} \ldots a(c+d'''$	$\frac{(a+m)r-ac}{a} \ldots a(c+d''')$
39	10	determinerebbero	determinerebbe .
40	9	HID	KID .
42	2	Em	Cm
	29	BL	bL
50	18	a	x
56	5	$\frac{a^2}{4} cd$	$\frac{a^2}{4} - cd$
68	18	$\frac{abm}{pp} z$	$\frac{abm}{dp} z$
72	9	cg	$-cg$
	14	ABE	ABC
73	9	disotto	disopra
82	7	$-$ BD	$-$ Bd
89	17	Problema	Problema , e dalle condizioni già stabilite
	18	totalmente	totalmente sotto le indicate condizioni
95	30	Fig. 59, 69	Fig. 59, 60.
103	2	$\frac{d^4}{4}$	$\frac{d^2}{4}$
106	29	$q = \frac{gk+hi}{g-i}$	$\frac{gk-hi}{g-i}$
109	10	$\frac{m(h-1)}{m^2+1}$	$\frac{m(h-n)}{m^2+1}$
111	2	$-(a'''-a'')$	$-4(a'''-a'')$

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
112	4	ci	si
	12	$\frac{A'C''-A''C'}{B''(B'+A'')}$	$\frac{A'C''-A''C'}{B''(A'+A'')}$
117	21	dei	dai
122	11	la	le
125	12	$-\frac{e+j\pi}{g+s\mu}$	$-\frac{e+j\pi}{g+j\mu}$
	13	$-\frac{g(d+i\pi)}{f+im\mu}$	$-\frac{g(d+i\pi)}{f+i\mu}$
127	34	$-(\tau-1v-\mu)^2$	$-(\tau-sv-\mu)^2$
	13	se	si

PARTE SECONDA.

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
135	8	Progressioni	Progressione
138	20	$T_3 = 9$	$S_3 = 9$
144	6	cognita	incognita
	21	n	u
	26	$\frac{u-a}{2}$	$\frac{u-a}{d}$
158	2	$((n+1)-n)$	$K((n+1)-n)$
172	9	$B'n^{m-1}$	$B'n^{m-1}$
	10	$I'n^{m-q-1}$	$J'n^{m-q-1}$
173	18	così D	così dalla D
182	1	T_2	T_n
186	28	quarto	quarto, il settimo
189	6	N	n
199	12	sommarli	sommarlo
216	13	$(g+1)^m$	$(g+i)^m$
218	15	n	a

		ERRORI	CORREZIONI
Pag.	lin.		
222	1	g	9
228	24	che significa	significa
229	22	presso	preso
230	17	$1 - \frac{x'}{x''}$	$1 \frac{x'}{x''}$
240	14	$\frac{(9, 0)}{2}$	$\frac{(0, 9)}{2}$
243	5	reali	reale
246	8	$\frac{a}{q}$	$\frac{1}{q}$
247	11, 12	accesso...disotto	eccesso . . . difetto .
255	22	quei .	quai .
	29	$\frac{b}{2+b}$	$\frac{b}{a+b}$
256	1	$\frac{b}{2n+b}$	$\frac{b}{2a+b}$

Nell' Algebra

106	30	$\frac{6224}{868}$	$\frac{6244}{808}$
348	20	numero intero	numero razionale

2
3
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
P
Q
R
T
V
5
8
O
X
Z
9
S

11
12
14
16
19
21
20

m
D
n
H
c
M
I
A
23
N
B
b
L
K
m
D
n
H
c
M
I
A
24
N
B
L
b
P
K
E
p
R
b
m
D
n
c
M
I
B
A
N
P
K
E
p
m
D
n
H
c
M
I
A
N
b
B
Q
L
P
K
E
F
p

Tav. V.
44
D
E
A
B
45
E
D
A
B
P
46
L
K
C
47
K
m
P
H
L
B
M
D
A
F
e
E
C
48
B
D
I
A
E
C
50
B
F́
M
D
É
A
C
E
51
B
D
É
A
C
E
2
B
M
D
P
C
N
53
A
E
N
M
H
L
B
D
C

55

A B H V
Z M′ M″

56

h k M m n o r
A b c P d e f g B

57

M
A P B
N

62

M
E
Z A D V
B
N

E M m
D P p V

63

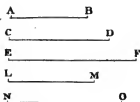
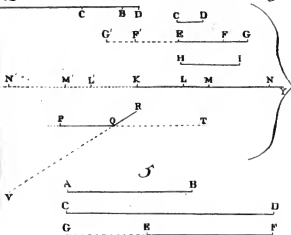
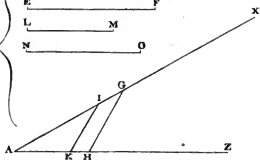
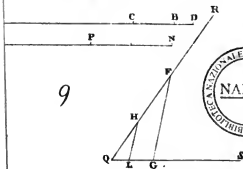
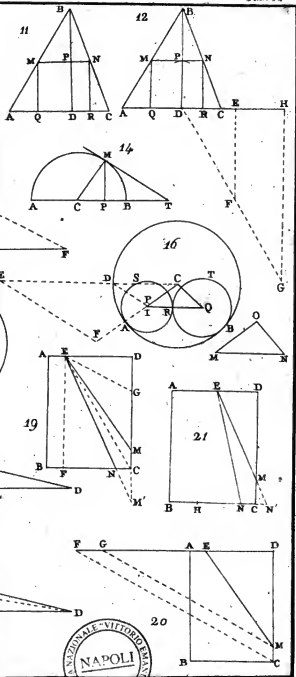
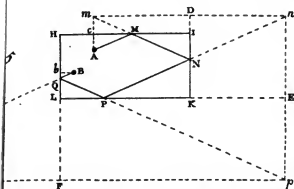
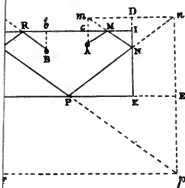
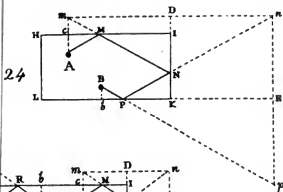
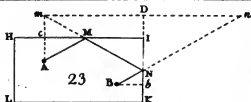
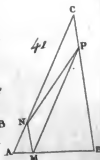
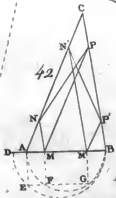
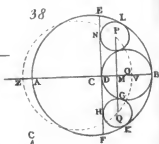
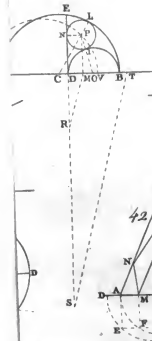
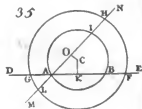
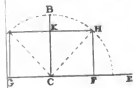
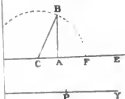
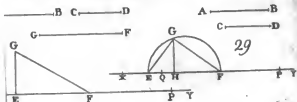
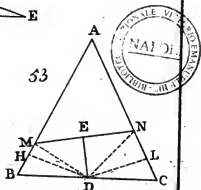
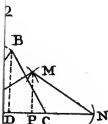
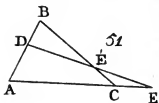
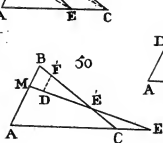
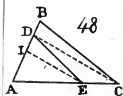
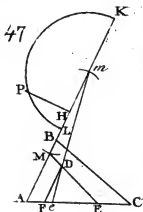
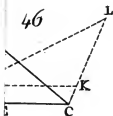
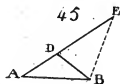
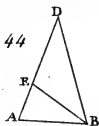
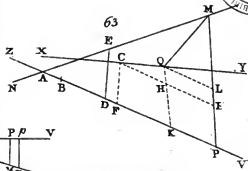
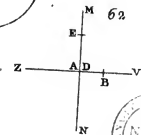
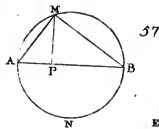
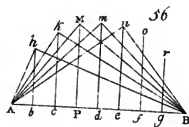
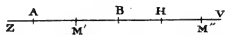
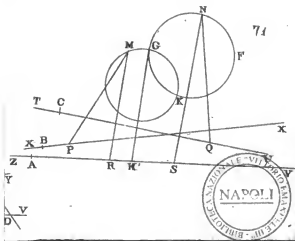
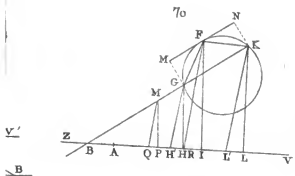
M
E
Z X C Q Y
A B H L
N D F I
K
P V

B D P p V
E M m

65

66

70

71

NOZIONI PRELIMINARI

SUL METODO

DELLE TRE COORDINATE

DI

GIUSEPPE TRAMONTINI

Professore di Geometria descrittiva nella Scuola d' Artiglieria, e Genio di Modena.

IN MODENA MDCCCVIII

PRESSO LA SOCIETÀ TIPOGRAFICA.

ARTICOLO PRIMO

Del punto.

1. Qualunque oggetto il quale con certa legge, e misure determinate possa concepirsi descritto nello spazio, può altresì essere rappresentato e per mezzo di immagini descritte sopra d' uno o più piani, e per mezzo di formole analitiche, le quali esprimano tutte le condizioni necessarie per determinare la sua forma, grandezza, e posizione.

2. Si concepiscano tre piani, i quali si taglino scambievolmente, e siano estesi indefinitamente per ogni verso. Il primo si chiami A, il secondo B, il terzo C, e tutti tre dicansi *coordinati* fra loro. Questi piani formeranno otto angoli solidi intorno al punto comune a tutti tre, e l'immensità dello spazio sarà dagli angoli stessi distinta in otto regioni. Qual si voglia punto assegnabile nello spazio o esisterà in uno de' piani coordinati, o in uno degli angoli solidi formati da essi d' intorno al punto comune, cui chiameremo O.

3. Immaginiamo nello spazio un punto qualsivoglia P, e da questo sia condotta ad incontrare ciascun piano coordinato una parallela all' intersezione degli altri due.

Si chiami x quella che incontra il piano A, y quella che incontra il piano B, z quella che incontra il piano C, e dicansi fra loro *coordinate* le x, y, z.

Egli è manifesto che il sistema delle tre x, y, z condotte dal punto P sarà in qualche condizione

diverso dal sistema di tre altre x', y', z' condotta similmente da un altro punto P'. Imperciocchè quando pure eguali siano in grandezza due *coordinate* cognomini, come per es. le x, x' spettanti a due punti diversi P, P', e riferite al medesimo piano A, o non saranno nel tempo stesso eguali fra loro le altre cognomini y, y'; z, z', o se lo siano, in tal caso o le x, x', o le y, y', o le z, z' non differendo in grandezza, differiranno almeno in posizione, cioè differiranno in quanto alla parte dove esistono per rispetto al piano cui sono riferite.

Per distinguere tutte queste circostanze si stabilisca che le coordinate, le quali si debbono intendere da una certa parte assegnata ad arbitrio per rispetto al piano cui son riferite, siano distinte col segno $+$ positivo, e quelle che debbonsi intendere dalla parte opposta del piano stesso abbiano il segno $-$ negativo.

In tal maniera ogni punto dello spazio avrà o la coordinata x, o la $-x$ relativamente al piano A, la y, o la $-y$ relativamente al piano B, la z, o la $-z$ relativamente al piano C. Quindi computate tutte le combinazioni che si possono formare di tali coordinate, a tre a tre, escluse quelle che contengono le coppie cognomini $x, -x$; $y, -y$; $z, -z$, si otterranno gli otto sistemi ternarj espressi nella seguente tavola, e ciascheduno di essi corrisponderà ad uno degli otto angoli solidi che abbiamo definiti al (n.° 2).

$x, +y, +z,$	$x, +y, -z,$
$x, -y, +z,$	$x, -y, -z,$
$-x, -y, +z,$	$-x, -y, -z,$
$-x, +y, +z,$	$-x, +y, -z,$

4. La posizione di un punto P nello spazio sarà determinata se siano date tre equazioni $x=a$; $y=b$; $z=c$, esprimenti i valori delle tre coordinate.

Infatti per la prima intendiamo essere il *punto* P collocato in un piano cui nomino X, parallelo al piano A posto dalla parte positiva, ed in tale distanza che se per un punto qual si voglia del piano X sia condotta fino al piano A una retta parallela all' intersezione del piano B col piano C, essa retta eguagli la data quantità a.

La seconda equazione significa similmente che il punto obbiettivo P si trova in un piano Y parallelo al piano B, dalla parte positiva ed in tale distanza che se da un punto qualunque del piano Y sia condotta fino al piano B una parallela all' intersezione del piano A col piano C, essa retta eguagli la data grandezza b.

Adunque dal significato simultaneo delle due prime equazioni si conosce che il punto P esiste nell' unica retta ove si tagliano i due piani X, Y i quali essendo determinati di posizione, determinata pure sarà la scambievole intersezione di essi.

Per la terza equazione in fine si conosce che il punto P deve giacere in un piano Z parallelo al piano C, posto dalla parte positiva, ed in tale distanza che se da un punto qualunque del piano Z sia condotta al piano C una parallela all' intersezione del piano B col piano A, essa retta eguagli la data quantità c. Adunque il punto obbiettivo P è nell' unico luogo dove il piano Z sega la retta comune agli altri due X, Y, e perciò il punto P, al quale appartengono le coordinate a, b, c è determinato nello spazio dalle date equazioni.

5. Egli è facile vedere che se qual si voglia delle coordinate x, y, z fosse negativa, sarebbe egualmente determinata la posizione del punto P. Se per es. fosse $y=-b$ invece di essere $y=b$, ciò

darebbe ad intendere che il piano Y in cui giace il punto P è posto dalla parte negativa per rispetto al piano coordinato B, le posizioni degli altri due piani X, Z restando le medesime di prima, ec.

6. Ora vogliasi passare dalla rappresentazione algebrica alla costruzione grafica. Sia rappresentato il supposto piano C dal piano del foglio (Fig. 1). Rappresenti la retta VV′ l'intersezione fra 'l piano B ed il piano C; la retta TT′ rappresenti l'intersezione dello stesso piano C col piano A. Il punto O rappresenterà quello che è comune a tutti i tre piani coordinati, e per esso punto O passerà conseguentemente la retta comune ai piani A, B.

Se stabiliscasi che le coordinate positive riferite al piano A, il quale passa per la TT′ debbansi intendere dalla parte V, saranno le negative dalla parte opposta V′. Così se le coordinate positive riferite al piano B, il quale passa per la VV′ siano dalla parte T, le negative saranno dall' opposta parte T′. Finalmente se vogliansi intendere dalla parte superiore per rispetto al piano C le coordinate positive ad esso riferite, saranno dalla parte inferiore le negative.

Presa sulla OV la porzione $Oa=a$ se pel punto a immagineremo condotto un piano X parallelo al piano A, segherà il piano C in una retta ap parallela alla TT′ e passerà pel punto obbiettivo P. (n.°4). Similmente presa sulla OT la $Ob=b$, se immagineremo pel punto b condotto un piano Y parallelo al piano B, segherà il piano C in una retta bp parallela VV′, e passerà esso pure pel punto obbiettivo P. Perciò quella retta in cui si tagliano i piani X, Y testè condotti pei punti a, e b passa pel punto P. Ma la retta stessa passa pure pel punto p dove si tagliano le due ap, bp, ed è parallela all'intersezione dei piani A, B; dunque la descrizione fatta del punto p indica essere il pun-

to obbiettivo P, in una retta condotta per p parallela all'intersezione de' piani A, B. Ora immaginiamo che il piano B, rotando intorno alla retta VV' come suo asse, venga a porsi per diritto col piano C. Sia la OK la retta in cui si tagliano i piani A, B quando son nella prima loro posizione, e prendasi la parte OK$=c$. È manifesto che se per K si conduca una retta indefinita KP' parallela alla VV', in essa KP' sarà l' intersezione del piano Z (n.° 4) col piano B. Se inoltre si tiri per a una retta aP' parallela ad OK, in essa AP' sarà l'intersezione del piano X col piano B, perciò ragionando come superiormente troveremo che la coordinata condotta dal punto obbiettivo P al piano B, supposto rimesso nella prima sua posizione, cade nel punto P', ovvero, ciò che è lo stesso, la retta condotta dal punto P' parallela alla in tersezione del piano A col piano C passa pel punto obbiettivo P. In oltre aP'$=$OK$=c$, e perciò la descrizione del punto p e della retta aP' dimostra che il punto obbiettivo P è all' estremità superiore di una retta condotta dal punto p parallela all' intersezione de' piani A, B, ed eguale alla aP'. Adunque il punto P è determinato per mezzo della rappresentazione grafica (Fig. 1).

7. Il punto p si chiama *projezione* del punto obbiettivo P sul piano C, ed il punto P' *projezione* dello stesso punto P sul piano B. Col metodo adoperato per ottenere le projezioni p, P' si potrà pure aver quella sul piano A. La Oa eguaglia la coordinata x condotta dal punto obbiettivo sul piano A; la Ob eguaglia la coordinata y condotta sul piano B; la OK eguaglia la z condotta sul piano C. Perciò le Oa, Ob, Ok si chiamano anch' esse coordinate del punto P. La OV si chiama l' *asse* delle coordinate x positive, la OV' l' *asse* delle x negative. La OT si chiama l' *asse* delle y positive; la OT' l' *asse* delle y negative. La OK si chiama

l' *asse* delle z positive. La OK, l'*asse* delle z negative. Il punto O chiamasi *origine* di esse coordinate.

8. La scambievole inclinazione de' piani coordinati è indifferente all' esattezza dell' esposto metodo. Ma le costruzioni divengono più facili, ed il loro significato più perspicuo se i piani coordinati sian posti ad angoli retti fra loro. Allora gli angoli solidi intorno al punto O son tutti eguali; le coordinate sono perpendicolari ai rispettivi piani, ai quali sono riferite, e quindi misurano le distanze del punto obbiettivo dai piani stessi. Per tutte queste ragioni si vogliono intendere fra loro normali i piani coordinati ed in tal posizione relativa li supporremo sempre per l' avvenire finchè non sia mestieri di cangiare tale disposizione.

9. Dall' ipotesi stabilita nel precedente (*n.*° 8) deriva, che allora quando due piani coordinati sian posti per diritto nel modo indicato (*n.*° 6), la retta che unisce le due projezioni d' un medesimo punto obbiettivo descritte sopra i due mentovati piani, è sempre normale alla scambievole intersezione de' medesimi. Imperciocchè nell' ammessa ipotesi le rette TT', VV' (Fig. 1) sono scambievolmente normali. Normale pure diviene la OK alla VV', e perciò coincide colla TT'. Ambedue le *pa*, P'*a* divengono per conseguenza normali in *a* alla stessa VV', e quindi formano una retta sola che unisce le due projezioni P', *p*.

10. Fra le coordinate di un punto, il quale giaccia in uno de' piani coordinati, quella sarà nulla che si riferisce a tal piano. Le altre due determinan sul piano stesso la posizione del supposto punto obbiettivo. Codeste due coordinate si possono allora riferire non più ai due piani corrispondenti, ma alle due rette, nelle quali i piani stessi tagliano il terzo dove è collocato il punto obbiettivo.

Da questo principio deriva il metodo di esprimere la posizione di quanti punti si voglia che siano in un medesimo piano, riferendo le loro coordinate a due rette date nel piano stesso, le quali s' incontrino in un punto.

Per motivi analoghi a quelli che furono esposti ($n.^\circ$ 8) le due rette accennate si pongono d' ordinario fra loro normali.

Le TT', VV' rappresentano un esempio di tali rette, che nel supposto caso ritengono il nome di *assi delle coordinate*. Le ap, bp, $a'p'$, $b'p'$ rappresentano le coordinate rispettive dei punti p, p'.

ARTICOLO SECONDO

Della Linea.

11. Qualunque linea può considerarsi descritta o percorsa da un punto mobile nello spazio. La forma di essa dipenderà dalla legge, con cui si move il punto descrittore, cioè dalla legge con cui procedono le tre distanze del punto stesso da tre piani coordinati, ai quali si riferisce la sua variabile posizione.

Si è veduto ($n.^\circ$6) come tali piani sian rappresentati dalla (Fig. I). La (Fig. II) rappresenti ciò che diviene la (Fig. I) nel caso ammesso al ($n.^\circ$ 8). La cognizione di due distanze, o coordinate $Oa=x$, $Ob=y$, riferite l' una al piano A, l'altra al piano B equivale alla projezione p del punto obbiettivo data sul piano C. Si può ancora per analogia inferire che la cognizione di due distanze o coordinate $Oa=x$, $OK=z$ equivale alla projezione dello stesso punto obbiettivo data sul piano B, ed in fine che la co-

gnizione delle due coordinate y, e z, riferite ai piani B, e C equivale alla projezione del medesimo punto obbiettivo data sul piano A.

Adunque data la legge, con cui procedono le coordinate Oa, Oa', Oa'' ec. riferite al piano A, e le corrispondenti Ob, Ob', Ob'' riferite al piano B si potranno costruire tanti punti p, p', p'' ec. (n.° 6) che siano sul piano C projezioni corrispondenti ad altrettante successive posizioni, nelle quali si trasferisce il punto descrittore. Laonde la linea che passa pei punti p, p', p'' ec. sarà sul piano C projezione di quella che supponghiamo descritta nello spazio, cioè se da qualsivoglia punto di questa medesima linea obbiettiva si concepisca tirata una normale sul piano C, essa lo incontrerà in un punto di quella linea che passa, per tutti i punti p, p', p'' ec.

Se per tanto sia data un'equazione, la quale esprima la relazione scambievole delle x, y, quell'equazione somministrerà quant'è d'uopo per costruire sul piano C la projezione $p\,p'\,p''$ ec. della linea obbiettiva (n°. 6). Se inoltre sia data una seconda equazione, la quale esprima la relazione reciproca delle variabili x, z, si potrà costruire la projezione della medesima linea obbiettiva sul piano B. Finalmente da un'equazione che esprima la reciproca relazione delle y, z si dedurrà la terza projezione sul piano A.

12. Egli è vero che da due date equazioni, ciascheduna delle quali determina una projezione della linea obbjettiva, si può ricavare una terza equazione corrispondente alla terza projezione; ma importa avvertire che talvolta nelle due date equazioni non sono distinte tutte le condizioni necessarie per determinar l'obbiettiva. Allora fa mestieri d'una terza equazione non identica con quella che risulta dalle prime due onde rendere completa

l'espressione. Questa proposizione apparirà in maggior luce dopo l'esame di alcuni esempi.

13. Siano date le due equazioni $ax = by$, $cx = dz$. Per la prima conosciamo che le distanze, o coordinate x, y di qualunque punto assegnabile nella obbiettiva conservano fra loro la ragione costante $b:a$. Dunque la projeziono della obbiettiva sul piano C è una retta. In oltre il punto dove l'obbiettiva incontra il piano A è quello medesimo dov' essa incontra il piano B, poichè allora quando sia la coordinata $x=0$, sarà pur la $y=0$. Dunque, (n°. 4) l'obbiettiva passa per un punto della retta in cui si tagliano scambievolmente i piani A, B e perciò la sua projezione sul piano C passa pel punto O.

Venendo alla seconda equazione, se faremo sopra di essa le osservazioni medesime che abbiamo fatte sopra la prima, apparirà esser pure una retta la projezione della obbiettiva sul piano B, e passare essa retta pel punto O. Adunque l'obbiettiva passa per un punto comune ai due piani C, B. E si è prima trovato che passa per un punto comune ai due piani A, B; dunque passa pel punto comune a tutti i tre piani coordinati.

Se per la prima projezione si immagini condotto un piano Π perpendicolare al piano C, in esso piano Π saranno tutte le rette che da quali punti si voglia della obbiettiva posson esser condotte perpendicolari al piano C (n.° 6). Adunque l'obbiettiva sarà nel piano Π. Similmente immaginando condotto per la seconda projezione un piano Σ perpendicolare al piano B, conchiuderemo che l'obbiettiva giace nel piano Σ. Adunque l'obbiettiva esiste ad un tempo nell' uno, e nell' altro dei piani Π, Σ, cioè nella scambievole intersezione di essi, che passa pel punto O ed è determinata di posizione.

Finalmente la considerata obbiettiva è indefi-

finita di lunghezza; imperciocchè, attribuito ad una delle variabili qualsivoglia valore reale, si dedurrà sempre dalle date equazioni un corrispondente valor reale per ciascheduna delle altre due variabili, lo che dimostra che a qualunque valore reale d'una coordinata, corrisponde realmente un punto della obbiettiva.

Per la qual cosa dalle due sole proposte equazioni abbiamo potuto conoscere ogni condizione relativa alla forma, posizione, e grandezza della linea obbiettiva descritta nello spazio da un punto, del quale le variabili coordinate sian soggette alla legge di relazione espressa dalle due equazioni medesime. Egli è perciò manifesto che nulla più resta indeterminato circa la proposta obbiettiva, che è quanto dire la terza equazione non può contenere condizione alcuna, la quale non sia determinata dalle due prime. La terza equazione dunque non puot' esser se non quella che risulta dalle due date.

14. Da quanto fu detto (n^o. 13) apparisce come determinare si possa una projezione d' un punto qualunque della obbiettiva. Imperciocchè nelle date equazioni attribuito un valore reale ad una delle variabili, per es. alla x, ad esso corrisponderà sempre un determinato valore reale di ciascheduna delle altre due, e quindi si avranno tutte le tre coordinate necessarie per determinare qual si voglia delle tre projezioni del punto corrispondente ($n.^o$ 6). Se dunque pongasi nella prima equazione $x=b$, cioè se vogliasi determinare un punto della obbiettiva, il quale sia alla distanza b dal piano A, ovvero abbia la sua coordinata $x=b$ riferita al piano A, questo punto dovrà avere la coordinata $y=a$ riferita al piano B, perchè posto $x=b$ la prima equazione diviene $ab=by$, d' onde proviene $y=a$.

Presa per tanto la $Oa=b$ (Fig. 2) e condotta nel piano C la retta ap parallela alla TT': presa la

$Ob=a$, e condotta la retta bp parallela al VV', il punto p, dove si tagliano le ap, bp sarà sul piano C la projezione del supposto punto dell'obbiettiva.

Sostituito ad x un altro valore si ricaverebbe nel modo stesso il corrispondente valore di y, con che sarebbe determinato sul piano C un altro punto della projezione, e quindi la projezione stessa, che è una retta indefinita; ma essendo già dimostrato nel ($n.°$ 13) che la projezione cercata passa pel punto O, non si avrà che a tirare una retta indefinita per O, p per avere in essa la cercata projezione sul piano C. Col metodo stesso si vede chiaramente che potrà determinarsi la projezione della obbiettiva sopra ciascheduno degli altri due piani A, B.

Che se facciasi $x=-b$, ne verrà $y=-a$, cioè si dovrà prendere la misura Oa dalla parte opposta verso V', e la misura Ob dalla parte opposta verso T' ($n.°$ 5). Compinta la costruzione, la projezione π O che ne risulta, coinciderà manifestamente colla Op se suppongasi indefinitamente prolungata; che se nell'equazione $ax=by$ fosse b quantità negativa, ed a positiva, sarà $x=\frac{b}{a}y=$ quantità negativa, e l'equazione in tal caso apparterrà ad una retta che ha la sua projezione sul piano C nell'angolo V'OT, siccome per converso una linea posta in tali condizioni deve avere i due membri affetti da segni diversi.

15. Siano le due equazioni $ax=y^2$, $bx=cz$. Esse esprimono

I. Che la linea obbiettiva, e quindi ancora ciascuna sua projezione passa pel punto O comune ai tre piani coordinati, perchè fatta $=0$ qualunque delle tre variabili, diviene $=0$ ciascuna delle altre due, cioè quel punto nel quale l'obbiettiva incontra uno dei piani coordinati, è quel medesimo, nel quale

incontra ciascheduno degli altri due, e quindi non può essere se non il punto comune a tutti tre.

II. L'obbiettiva giace tutta dalla parte positiva del piano A, perchè supposto negativo il valore di x, quello di y sarà immaginario, e quindi non avvi alcun punto nell' obbiettiva; il quale possa corrispondere all' ipotesi di x negativa. Ma posta z negativa ne verrà pur x negativa. Dunque nemmeno dalla parte negativa del piano C potrà esistere alcun punto della obbiettiva, e perciò essa giace tutta dalla parte positiva anche per rispetto al piano C.

III. Le coordinate x, z avendo la costante ragione $c : b$, la projezione dell' obbiettiva sul piano B è una linea retta, e quindi l'obbiettiva stessa giace in un piano perpendicolare al piano B (n^o. 13).

IV. Ad ogni valore del quale è suscettibile la coordinata x, corrispondono due valori della y eguali in grandezza, ma diversi per segno, essendo l' uno $+\sqrt{ax}$, l'altro $-\sqrt{ax}$. Questa circostanza combinata colla legge espressa nella seconda equazione fa vedere che assegnato qualunque punto dell'obbiettiva, il quale abbia una data coordinata x riferita al piano A, e per conseguenza la corrispondente y riferita al piano B, e la corrispondente z riferita al piano C, ($n.^i$ 4, 5), vi sarà sempre un altro punto, il quale avrà le medesime coordinate x, z come il primo, e per conseguenza sarà posto dalle medesime parti come il primo per rispetto ai piani A, C, avrà la coordinata y di egual grandezza a quella del primo, ma essendo l' una positiva, l' altra sarà negativa, cioè essendo collocato dalla parte positiva il primo punto per rispetto al piano B, sarà il secondo collocato bensì ad eguale distanza, ma dalla parte negativa per rispetto al piano stesso, talchè volendo concepir brevemente in termini algebrici codesto ragionamento, si con-

chiuderà che se v'abbia nell'obbiettiva un punto determinato da un sistema di coordinate (x, y, z) ve n'ha sempre un altro determinato dal sistema $(x, -y, +z)$ (n.° 3).

Da ciò deriva che il piano B divide in due rami eguali, e simili la linea obbiettiva, e la projezione di essa sul piano C è pur divisa in due rami eguali e simili dall'asse delle x, cioè dalla retta VV'.

V. Tanto l'obbiettiva, quanto ciascuna delle sue projezioni procede indefinitamente, ma l'obbiettiva e le projezioni sui piani C, e B procedono soltanto dalla parte positiva del piano A; la projezione poi sul piano A procede dall'una e dall'altra parte del piano B. Questa proposione si rende manifesta osservando che attribuiti ad x valori reali e positivi successivamente più grandi corrispondono a ciascheduno di essi due valori di y sempre reali e successivamente maggiori, eguali in grandezza e sol diversi per segno, come pure un solo valore di z sempre reale e successivamente più grande, affetto dal medesimo segno di x.

Ciascheduno dei punti che sono egualmente distanti, e dalla medesima parte per rispetto al piano A, dalla medesima parte ed egualmente distanti per rispetto al piano C, egualmente distanti, ma a parti opposte per rispetto al piano B, resta compiutamente determinato dalle due date equazioni dalle quali si ricavano i due mentovati sistemi (x, y, z); $(x, -y, +z)$.

Per la qual cosa nulla più rimane a determinare col mezzo della terza equazione, la quale per conseguenza dev'essere identica con quella che risulta dalle prime due.

16. La costruzione delle projezioni si eseguirà colla scorta dei principj già stabiliti di sopra. La projezione sul piano B si eseguirà come fu indicato nel (n.° 6.).

Per aver quella sul piano C, alle Oa, Oa', Oa'' che rappresentino le successive grandezze di x, si applicheranno le corrispondenti $ap, a'p', a''p''$ medie proporzionali tra le rispettive Oa, Oa', Oa'' e la costante quantità data a. La curva che passa per tutti i punti p, p', p'' ec. sarà un ramo della cercata projezione sul piano C, e prolungando dall' altra parte di VV' le applicate ap, $a'p'$, $a''p''$ ec. sin che i loro prolungamenti eguaglino rispettivamente le applicate stesse, si otterrà il secondo ramo della projezione eguale e simile al primo.

17. La teoria delle sezioni coniche insegna essere la curva p, p', p'' ec. una parabola, il cui parametro $= a$, l' asse OV, il vertice O. Quindi si deduce che l' obbiettiva è un' altra parabola, il cui vertice è pure in O, l' asse è nella projezione dell' obbiettiva stessa sul piano B, il parametro poi $= \frac{ac}{\sqrt{(c^2+b^2)}}$.

Ma al nostro intento basti l' aver riconosciuta nelle due date equazioni la forma e posizione della proposta obbiettiva, ed aver potuto tradurre il senso delle equazioni stesse in una equivalente rappresentazione grafica composta dalle projezioni che supponghiamo descritte.

18. Sian ora proposte le due equazioni $ax = y^2$, $z^3 = b^2x$. Quanto alla prima ripeteremo le considerazioni fatte sull' equazione analoga proposta nel (*n*.°15). La seconda poi non ammettendo se non che un solo valore reale di z corrispondente ad un determinato valore di x, saranno contenute nelle due date equazioni tutte le condizioni necessarie per determinare ciascun punto dell' obbiettiva, e perciò il significato della terza equazione sarà implicito nelle due date.

Di fatti non potendo x essere suscettibile di niun valor negativo, poichè in tal caso sarebbe y im-

immaginaria, ne segue che a qualunque valor positivo di x, corrispondono sempre due valori $+y$, $-y$ eguali in grandezza, ma diversi per segno ed un valor unico di z, sempre affetto dal medesimo segno di x. Ciò denota che a qualunque distanza dalla parte positiva del piano A sono nella obbiettiva due punti collocati ambedue ad eguali distanze dalla parte positiva del piano C, ed a parti opposte, ma a distanze eguali per rispetto al piano B; talchè uno di codesti punti avrà le coordinate (x, y, z), l'altro avrà le $(x, -y, +z)$ come nell'esempio precedente.

La sola diversità consiste nell'esser quello relativo ad una linea, che giace in un piano, e questo relativo ad una linea che non può giacere in un piano, e quindi spetta a quella classe di curve, le quali si chiamano a doppia curvatura.

Imperciocchè assegnato un punto nell' obbiettiva, al quale spettino le coordinate (x, y, z) ve n'ha sempre un altro corrispondente alle $(x, -y, +z)$. Adunque la retta che unisce codesti due punti è parallela all'intersezione dei due piani A, C; perchè i suoi termini hanno la medesima distanza x dal piano A, e la medesima distanza z dal piano C. Similmente supposto nell' obbiettiva un' altro punto corrispondente al sistema di coordinate (x', y', z') ve n' avrà un altro corrispondente al sistema $(x', -y', z')$, e la retta che unisce codesti due nuovi punti sarà pure parallela all' intersezione dei piani A, C, cioè normale al piano B: Se ora si concepisca un piano Π condotto per le due supposte normali al piano B, passerà per quattro punti dell' obbiettiva; e sarà normale al piano B.

Adunque tutti i punti assegnabili nel piano Π avranno le projezioni loro sul piano B in quella medesima retta dove il piano Π sega il piano B (n.° 13). Ma se l'obbiettiva potesse giacere in un piano questo piano sarebbe quell' unico, il quale passa per

tre punti quali si voglia dell' obbiettiva stessa, e perciò sarebbe il piano Π.

Adunque se l'obbiettiva potesse giacere in un piano, la sua projezione sul piano B sarebbe una retta. Ma ciò si oppone (*n.*° 11) alla natura dell' equazione $z^3 = b^2x$; dunque ec.

19. Siano le due equazioni $y^2 = px$, $z^2 = p'x$. Avremo $y = \pm\sqrt{px}$, $z = \pm\sqrt{p'x}$. Supposti, come ne' superiori esempi, sempre reali e positivi i coefficienti, nessun valore negativo di x sarà ammissibile, poichè se x sia negativa, riesce immaginaria l'una e l'altra delle y, z.

Posta $x = o$, sarà pure $y = o = z$, e crescendo indefinitamente la grandezza di x positiva, crescerà corrispondentemente quella di y e di z. Adunque l'obbiettiva esiste tutta dalla parte positiva del piano A, passa per l' origine delle coordinate, e procede indefinitamente dalla parte positiva del piano stesso A. Perchè poi ad ogni valore positivo di x corrispondono sempre due valori di y eguali in grandezza, ma diversi per segno, e due valori di z eguali pure in grandezza ma diversi per segno, conosciamo che possono aver luogo tutti i quattro seguenti sistemi di coordinate, a ciascheduno dei quali corrisponde un punto dell' obbiettiva.

$$x,\quad y,\ z;\qquad x,\quad y,\ -z$$
$$x,\ -y,\ z;\qquad x,\ -y,\ -z$$

I. Adunque l' obbiettiva è divisa in quattro rami eguali e simili dai due piani B, C, essendo ciascun ramo collocato in uno degli angoli diedri che formansi dagli stessi piani B, C d' intorno la comune loro intersezione.

II. I due rami collocati da una medesima parte del piano C hanno comune la projezione sul piano B, e reciprocamente que' due rami che sono dalla medesima parte del piano B hanno la projezione comune sul piano C; che è quanto dire,

ogni punto di quella projezione sul piano B, che viene determinata dall'equazione $z^2 = p'x$ sarà sempre comune projezione di due punti della obbiettiva, l' uno dei quali avendo le coordinate x, z, avrà per terza coordinata y, l' altro avendo le stesse x, z, avrà per terza coordinata $-y$; e parimenti ogni punto della projezione sul piano C che è determinata dall'equazione $y^2 = px$ sarà projezione comune a due punti della obbiettiva l' uno de' quali avendo le coordinate x, y avrà per terza coordinata z, l' altro avendo le stesse x, y avrà per terza coordinata $-z$.

III. La retta linea la quale congiunge due punti dell' obbiettiva corrispondenti a due sistemi (x, y, z), $(x, -y, -z)$ giace in un piano perpendicolare ai due piani coordinati B, C, ed è divisa per mezzo da ciascheduno di essi, dunque taglia la comune loro intersezione. Perciò tutte le rette, le quali congiungono due punti dell' obbiettiva, determinati da due sistemi di coordinate analoghi ai due precedenti, segano la comune sezione dei due piani B, C.

IV. Lo stesso dobbiamo conchiudere di quelle rette, le quali congiungono rispettivamente i punti determinati dai sistemi di coordinate analoghi ai due $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$.

V. L' angolo d' inclinazione che ciascheduna di tali rette forma con ciascheduno dei piani B, C è determinato dalla costante ragione che hanno fra loro le quantità z, y, cioè nominato φ quell'angolo formato col piano C, sarà $y:z::1: \text{tang.}\varphi::\sqrt{px}:\sqrt{p'x}::\sqrt{p}:\sqrt{p'}$ e quindi $\text{tang.}\varphi = \sqrt{\frac{p'}{p}}$. L'angolo poi col piano B sarà $(90° - \varphi)$.

Adunque tutte le mentovate rette le quali uniscono i punti determinati dai due sistemi (x,y,z), $(x, -y, -z)$ o pure quelli determinati dai due sistemi $(x, -y, z)$; $(x, y, -z)$ sono egual-

mente inclinate al piano C. Ma si è dimostrato che passano tutte per la comune intersezione dei piani B, C; quelle rette adunque sono tutte fra loro parallele e giacciono in un medesimo piano.

Per la qual cosa due rami dell' obbiettiva contenuti da due angoli diedri opposti, ed intorno la comune intersezione, dei piani B, C, giacciono in un medesimo piano, e costituiscono una sola curva piana. Laonde l' obbiettiva è composta di due curve piane, eguali e simili fra loro, che hanno l' asse comune in quella retta, ove si tagliano i piani B, C, il vertice nell' origine delle coordinate, e i loro piani egualmente inclinati coi piani B, C, ma a parti opposte di essi.

Ora poichè abbiamo veduto (*n.*° 2) che le projezioni di quelle due curve coincidono tanto sul piano B, quanto sul piano C, conchiuderemo che le due equazioni rappresentanti le projezioni sui piani B, C di una sola di quelle curve, saranno le stesse che rappresentano le projezioni dell' altra, o ancora del sistema composto da ambedue. Ciò posto se vogliasi indicato distintamente uno solo di questi tre casi, sarà d' uopo d' una terza equazione, la quale contenga la condizione caratteristica del caso stesso.

20. La terza equazione corrispondente al caso in cui si vogliano rappresentate ambedue le curve insieme, sarà quella che risulta dalle due date equazioni, come si può inferire dal (*n.*° I), cioè $p'y^2 = pz^2$. In quest' equazione si veggono confirmate tutte le proposizioni del (*n.*° V). Imperciocchè è manifesto che la projezione dell' obbiettiva sul piano A, è un sistema di due rette linee, l' una delle quali è determinata dall' equazione $y\sqrt{p'} = z\sqrt{p}$, oppure $-y\sqrt{p'} = -z\sqrt{p}$; l' altra è determinata dall' equazione $y\sqrt{p'} = -z\sqrt{p}$, oppure $-y\sqrt{p'} = z\sqrt{p}$. Adunque conchiuderemo come al (*n.*° 13) che l' obbiettiva giace in due piani

perpendicolari al piano A ed insistenti sulle due rette mentovate. Queste si tagliano scambievolmente in un punto della retta comune ai due piani B, C, poichè ad $y = o$ corrisponde $z = o$, e ciò si verifica contemporaneamente nelle equazioni dell' una e dell' altra retta. Adunque i due piani contenenti l'obbiettiva si tagliano in quella retta medesima, che è comune ai piani B, C.

L'angolo ch'esse rette formano con l'asse delle y, e con quello delle z è determinato dalla costante ragione $\sqrt{p} : \sqrt{p'}$, ed eguaglia l' angolo d' inclinazione formato rispettivamente col piano B e col piano C da ciascheduno de' piani obbiettivi projettati nelle rette medesime. Adunque i due piani obbiettivi sono similmente inclinati al piano B, e similmente inclinati al piano C.

21. Se le proposte equazioni indicar debbano una sola delle due curve accennate, (*n.*°19) allora, ferme le due equazioni del numero stesso, convien che la terza sia una delle due che si possono dedurre dalla risultante $y^2p' = pz^2$; cioè per l' una delle suddette curve la terza equazione sarà $y\sqrt{p'} = z\sqrt{p}$: per l' altra sarà $y\sqrt{p'} = -z\sqrt{p}$. Per la qual cosa mi sembra coll'addotto esempio abbastanza provato che non senza qualche restrizione si deve intendere quel solito teorema: *una linea è in generale determinata con due projezioni*; e ciò basti per rendere avvertito onde non abusare della preziosa estensione di cui sono dotate le espressioni algebriche.

22. Dimostrato, e come per le date equazioni venga espressa la forma e posizione d' una linea nello spazio, e come dedur si possano le projezioni della medesima, ne segue, che se per mezzo delle opportune equazioni venga rappresentato un sistema di linee esistente nello spazio, tanto dalle stesse equazioni, quanto dalle corrispondenti projezioni potrà essere egualmente indicata ogni

circostanza di posizione reciproca esistente fra le dette obbiettive.

Se queste si tagliano, i valori delle coordinate corrispondenti ai punti d' intersezione soddisferanno egualmente alle equazioni di ciascheduna obbiettiva. Così le projezioni de' punti stessi saranno punti comuni alle projezioni delle obbiettive su tutti i tre piani coordinati, ovvero due projezioni di ciaschedun d' essi punti sopra due piani coordinati, saranno egualmente distanti dal terzo (*n.*° 9).

Se le linee obbiettive si tocchino, avranno una tangente comune, e le condizioni di essa verranno determinate dalle equazioni delle linee obbiettive che si toccano, siccome le projezioni della tangente medesima, dovendo essere tangenti alle projezioni delle obbiettive, dipenderanno da queste stesse projezioni ec.

Ma il fine di questo saggio, ed i limiti ad esso prescritti non comportano di andar oltre in tale materia, nella quale è indispensabile una certa familiarità colla dottrina delle curve piane da non doversi esigere, nè supporre nelle persone alle quali principalmente s' intende di parlare.

Per la qual cosa converrà ristringersi alle linee rette, per l'analisi delle quali bastano i primi elementi comuni, e le nozioni che abbiamo precedentemente stabilite. Oltre di che i principj che ricaveremo dall' analisi di codeste linee, serviranno di fondamento alle succedenti dottrine.

23. Abbiam veduto (*n.*° 13) che due equazioni della forma $ax = by$, $cx = dz$ determinan completamente una retta, che passa pel punto comune ai tre piani coordinati.

Sarà dunque determinata la lunghezza d'una sua parte intercetta fra due punti corrispondenti a due dati sistemi di coordinate, ammissibili nelle equazioni della retta stessa.

Imperciocchè nominata u codesta parte, (x,y,z) il primo sistema di coordinate che determina un estremo della retta, (x', y', z') il secondo, che determina l'altro estremo, sarà $u^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$; ricavati poscia dalle date equazioni i vari di y, z, y', z' espressi per le rispettive funzioni di x ed x', si otterrà l'equazione $u^2 = \left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{d^2}\right)(x'-x)^2$, ove attribuiti i loro valori ad x', ed x, si avrà espressa in quantità note la cercata lunghezza di u. Se uno dei valori supposti fosse $= 0$, il punto corrispondente al sistema di coordinate cui spetta un tal valore sarebbe manifestamente l'origine stessa delle cordinate, ed in tal caso si avrà $u^2 = x^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{d^2}\right)$ quando $x' = 0$, oppure $u^2 = x'^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{d^2}\right)$ quando $x = 0$.

24. Sarà pure determinato l'angolo d'inclinazione che l'obbiettiva forma con ciascheduno dei piani coordinati.

Imperciocchè da un punto P qualsivoglia della obbiettiva s'immagini condotta una perpendicolare a ciascheduno dei piani coordinati. Sia p la projezione ($n.°$ 6) (Fig. 2) sul piano C del supposto punto P, e si conduca la Op. Sian chiamate al solito (x, y, z) le coordinate determinanti il punto P, eguali rispettivamente alle perpendicolari che dallo stesso punto P abbiamo immaginato essere condotte su i piani coordinati. Se l'angolo d'inclinazione che forma l'obbiettiva col piano C si chiami m, avremo $Op : z :: 1 : \text{tang.}\, m$, ed essendo $Op = \sqrt{x^2 + y^2}$, sarà $\text{tang.}\, m = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{cx}{d\sqrt{x^2 + \frac{a^2x^2}{b^2}}} =$

$\frac{cb}{d\sqrt{b^2+a^2}}$. Similmente si troverà l'espressione degli angoli formati cogli altri piani B, A.

25. Considerata come raggio la parte della obbiettiva intercetta fra 'l punto P e l'origine delle coordinate, e nominati rispettivamente m, n, t, gli angoli che forma coi piani coordinati A, B, C; le coordinate x, y, z saranno i rispettivi seni. Perciò, chiamata r la sopradefinita parte dell' obbiettiva, sarà $r^2 = 1 = \text{sen.}^2 m + \text{sen.}^2 n + \text{sen.}^2 t$, e $\text{sen.}^2 m = \cos.^2 n - \text{sen.}^2 t = \cos.(t+n)\cos.(t \backsim n)$ (a).

Da ciò si ricava entro quai limiti è sempre circoscritta la somma dei tre angoli d' inclinazione che la retta obbiettiva può formare coi tre piani coordinati.

In fatti non potendo essere maggiore di 90° niuno degli angoli m, n, t, sarà sempre minore di 90° la differenza tra due di essi, e perciò $\cos.(t \backsim n)$ sarà sempre quantità positiva. In oltre essendo sempre quantità positiva $\text{sen.}^2 m$, sarà ancora sempre positiva la quantità $\cos.(t+n)$, cioè la somma di due angoli non potrà mai superare un retto.

Pongasi $(t+n) = 90°$. Sarà $\text{sen.}^2 m = 0$, e perciò $m = 0$. Dunque, essendo eguale ad un retto la somma di due angoli, il terzo sarà necessariamente nullo.

Pongasi $m = 90°$; sarà $\text{sen.}^2 m = 1 = \cos.(n+t)\cos.(t \backsim n)$, equazione impossibile se non sia $n = 0$, $t = 0$. Adunque se uno degli angoli sia retto, ciascuno degli altri due sarà nullo.

Ponendo che nessuno degli angoli sia nullo, sarà sempre $\text{sen.}\, m$ maggiore di $\cos.(t+n)$ e minore di $\cos.(t \backsim n)$, dovendo essere $\cos.(t+n) < \cos.(t \backsim n)$. Dunque m sarà maggiore del complemento di $t+n$, e quindi $(m+n+t) > 90°$. Laonde riassumendo le

(a) Il segno $\backsim$ si prende per dimostrare la differenza assoluta tra t ed n indipendentemente dal suo segno positivo, o negativo.

cose dette di sopra si conchiude che la minima somma è 90°. e questo caso esige che uno almeno degli angoli sia nullo.

Quando gli angoli m, n, t sian nel caso della massima somma, dovrà il secondo membro dell' equazione $\text{sen.}^2 m = \cos.(t+n)\cos.(t-n)$ aver il massimo valore cui possa giugnere senza mutare la somma $(t+n)$. Ma ciò avviene quando $n=t$, e lo stesso ragionamento si può ripetere sopra l' equazione $\text{sen.}^2 t = \cos.(m+n)\cos.(m-n)$, la qual deve sussistere al pari della precedente, e parimenti sopra l' altra $\text{sen.}^2 n = \cos.(m+t)\cos.(m-t)$. Adunque la massima somma esige che i tre angoli m, n, t siano eguali fra loro.

Ma una retta che passa pel punto comune ai tre piani coordinati, e forma il medesimo angolo d' inclinazione con ciascheduno di essi è nel caso in cui si trova la diagonale del cubo relativamente alle sue faccie. Dunque la massima somma ricercata eguaglia il triplo di quell' angolo che forma la diagonale del cubo con ciascheduna delle faccie.

Il seno di tal angolo, posto $r=1$ è $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

A qualunque retta data nello spazio si potrà condurre una parallela pel punto comune ai tre piani coordinati, e gli angoli formati da questa parallela coi piani coordinati saranno eguali, ordinatamente, a quelli che forma coi piani stessi la retta data. Dunque la somma degli angoli che questa data retta qualunque, forma coi piani coordinati sarà sempre circoscritta dai termini definiti superiormente.

26. Siano le due equazioni $ax=by+p=b\left(y+\frac{p}{b}\right)$, $fx=hz+q=h\left(z+\frac{q}{h}\right)$. Dalla prima si otterrà la

projezione dell'obbiettiva sul piano C (*n.*° 6) e si ha la proporzione $x:\left(y+\frac{p}{b}\right)::b:a$. Dalla seconda si otterrà similmente la projezione sul piano B, e si ha $x:\left(z+\frac{q}{h}\right)::h:t$. Ciascheduna di tali projezioni è una retta linea. Dunque ragionando come al (*n.*° 13) l'obbiettiva pure è una retta. La differenza tra il presente caso e quello del (*n.*° 13) consiste in ciò, che in quello la retta obbiettiva passa per l'origine delle coordinate, ed in questo no.

27. Per tanto se nelle date equazioni le coordinate variabili x, y, z non oltrepassino il primo grado, l'obbiettiva è sempre una retta.

Quando ciascun membro delle date equazioni sia privo di termini costanti, l' obbiettiva passa pel punto comune ai tre piani coordinati (*n.*° 13).

Passerà per un punto comune a due soli piani coordinati, se nella sola equazione fra le coordinate, che si riferiscono a tali piani, manchino i termini costanti. Finalmente l' obbiettiva incontrerà ciascheduno dei piani coordinati, in un punto diverso, quando in ciascheduna delle date equazioni si ritrovi alcun termine costante.

28. Si cerchi ora il punto d'incontro dell' obbiettiva con qualsivoglia dei piani coordinati, e sia questo il piano C.

La distanza del cercato punto dal piano C sarà nulla. Dunque dalle date equazioni sarà espresso il supposto caso, quando in esse pongasi $z=0$.

Allora si avrà $x=\frac{q}{f}$ ed $y=\frac{aq-pf}{bf}$, e con questi valori delle coordinate x, y si potrà determinare graficamente sul piano C il punto cercato (*n.*° 10).

Similmente si potrà determinare il punto d'incontro con ciascheduno degli altri due piani A, B.

29. Passiamo a descrivere la projezione della obbiettiva sopra qualsivoglia dei piani coordinati, e pongasi essere il piano C.

Sia questo piano rappresentato come prima, da quello del foglio (Fig. 3), e le intersezioni di esso coi piani B, A siano rappresentate dalle rette VV', TT' poste ad angoli retti fra loro nel punto O. Quei punti ne' quali l' obbiettiva incontra i piani A, B avranno le projezioni loro, il primo sulla retta TT', il secondo sulla VV' ($n.^o$ 8).

Per ottenere la seconda di tali projezioni converrà porre $y=o$: ($n.^o$ 10), e ne verrà $x=\frac{p}{a}$. Presa dunque $O\beta=\frac{p}{a}$ dalla parte V positiva, sarà β la projezione del punto d' incontro col piano B.

Similmente fatto $x=o$ ne verrà $y=-\frac{p}{b}$, e quindi presa $O\alpha=\frac{p}{b}$ dalla parte negativa, sarà α la projezione del punto d' incontro col piano A.

Dunque tirata pei punti α, β l' indefinita $\alpha\beta$, sarà questa retta la projezione dell' obbiettiva sul piano C.

In simil modo si troverà la projezione sopra qual si voglia degli altri due piani A, B.

30. A tutte le ricerche fatte precedentemente sopra la retta obbiettiva nell' ipotesi che passi per l' origine delle coordinate, puossi egualmente soddisfare col metodo stesso ancor quando la retta non passi per l' origine mentovata. Quanto al quesito del ($n.^o$ 23) si verifica ancora nel presente caso che $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}=u$, quindi $u=(x'-x)\cdot\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{b^2}+\frac{f^2}{h^2}\right)}$, essendo u la parte della obbiettiva intercetta fra due punti, l' uno

de' quali abbia le coordinate (x, y, z), l'altro abbia la (x', y', z').

Per ciò che risguarda la ricerca del (n.° 24) si potrà rendere identico il nuovo caso con quello, nel seguente modo.

S' immagini un piano B' paralello al piano B e posto alla distanza $-\frac{p}{b}$ da esso. Tutti i punti dello spazio che hanno la distanza y dal piano B, avranno la distanza $Y = \left(y + \frac{p}{b}\right)$ dal piano B'.

Similmente s' immagini un piano C' paralello al piano C, e posto alla distanza $-\frac{q}{h}$ da esso. Tutti i punti dello spazio che hanno la distanza z dal piano C, avranno la distanza $Z = \left(z + \frac{q}{h}\right)$ dal piano C'.

Per tanto fatto $X = x$ se le due date equazioni si trasformino nelle altre due seguenti $aX = bY$, $fX = hZ$ le quali rappresentano la relazione tra le coordinate X, Y, Z riferite al nuovo sistema di piani coordinati A, B', C'; queste ultime equazioni esprimono una retta che passa pel punto comune ai tre piani A, B', C' (n.° 13), la qual retta è la medesima che si esprime per le due prime equazioni date, perchè ogni punto di essa avendo la distanza x dal piano A, la y dal piano B, la z dal piano C deve avere la medesima $x = X$ dallo stesso piano A, la $\left(y + \frac{p}{b}\right) = Y$ dal piano B', la $\left(z + \frac{q}{h}\right) = Z$ dal piano C'. Adunque avremo (n.° 24)

tang. $m = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{bf}{h\sqrt{a^2 + b^2}}$, e nominati n, t, gli angoli formati rispettivamente coi piani B, A,

$\text{tang.}\ n = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Z^2}} = \frac{ah}{b\,.\sqrt{h^2+f^2}}$, $\text{tang.}\ t = \frac{X}{\sqrt{Y^2+Z^2}} = \frac{bh}{\sqrt{a^2h^2+b^2f^2}}$.

31. Dalle cose già stabilite si deduce agevolmente che se $x=my+n$, $x=Mz+N$ siano le equazioni di una retta Π, e le $x=m'y+n'$, $x=M'z+N'$ siano quelle di un' altra retta Π' paralella alla Π, dovran essere $m=m'$, $M=M'$.

Imperciocchè le prime due equazioni si riducano alla forma $X=mY$, $X=MZ$, e le due seconde riducansi similmente alla forma $X'=m'Y'$, $X'=M'Z'$. (*n.*° 30).

Saranno A, B', C' i piani ai quali si riferiscono le coordinate X, Y, Z della retta Π; A, B'', C'' quelli ai quali si riferiscono le coordinate X', Y', Z' della retta Π' paralella alla Π.

Se immagineremo presa nella Π una porzione u intercetta fra l'origine delle sue coordinate X, Y, Z ed un punto P, e similmente presa nella Π' una porzione $u'=u$ intercetta fra l' origine delle sue coordinate X', Y', Z' ed un punto P', le coordinate X, Y, Z del punto P dovranno essere rispettivamente eguali alle coordinate X', Y', Z' del punto P'. Perciò $mY=m'Y'$, ed essendo pure $Y=Y'$, sarà necessariamente $m'=m$. Nel modo stesso dimostreremo essere $M=M'$.

In una maniera analoga si dimostra poi per converso che essendo $m=m'$, $M=M'$; le due rette debbon essere paralelle.

32. Relativamente a tre piani coordinati A, B, C essendo date le tre coordinate (x', y', z') d'un punto che si chiami P', e le (x'', y'', z'') d' un altro punto P''; trovar le equazioni della retta che passa pei punti P', P''.

Le cercate equazioni debbon essere in generale della forma, $ax=by+p$, $fx=hz+q$, (*n.* 27). Queste

si riducono alle due $x = \frac{b}{a} y + \frac{p}{a}$, $x = \frac{h}{f} z + \frac{q}{f}$. Esse debbono sussistere, tanto ponendo i valori (α, β, γ) delle corrispondenti (x', y', z'), quanto ponendo i valori $(\alpha', \beta', \gamma')$ delle (x'', y'', z''). Ciò posto il problema si riduce ad esprimere i valori de' coefficienti $\frac{b}{a}$, $\frac{p}{a}$, $\frac{h}{f}$, $\frac{q}{f}$ per mezzo delle date quantità $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$.

Per tanto essendo $(x''-x') = \frac{b}{a}(y''-y')$, sostituiti i corrispondenti valori, si avrà $\frac{(\alpha'-\alpha)}{(\beta'-\beta)} = \frac{b}{a}$, e perciò se pongasi $b = (\alpha'-\alpha)$, sarà $a = (\beta'-\beta)$. L'equazione generale tra le coordinate x, y diverrà dunque $x = \frac{(\alpha'-\alpha)y+p}{(\beta'-\beta)}$, la quale deve sussistere tanto ponendo $x=\alpha$, ed $y=\beta$ relativamente al punto P, quanto ponendo $x=\alpha'$, $y=\beta'$ relativamente al punto P'. Fatta però l' una o l' altra di queste sostituzioni si ricaverà $p = \alpha\beta' - \alpha'\beta$, e l' equazione tra le coordinate x, y relative alla retta cercata sarà $x(\beta'-\beta) = (\alpha'-\alpha)y + (\alpha\beta'-\alpha'\beta)$. Similmente si troverà quella tra le x, z essere $x(\gamma'-\gamma) = (\alpha'-\alpha)z + (\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)$.

33. Date le due equazioni $x=my+n$, $x=Mz+N$ d' una retta Π, e le due altre $x'=m'y'+n'$, $x'=M'z'+N'$ d' una seconda retta Π', si ricerca se le due rette s' incontrino in qualche punto.

Nell' ipotesi che le due rette s'incontrino, debbono rispettivamente coincidere le coordinate x, y, z, colle loro cognomini x', y', z' nel supposto punto d'incontro. Adunque sarà $my+n = m'y'+n' = Mz+N = M'z+N'$, ed essendo pure $y=y'$, $z=z'$, sarà $y = \frac{n-n'}{m'-m}$, $z = \frac{N-N'}{M'-M}$, d'onde proviene $x = \frac{m'n-n'm}{m'-m}$

$= \frac{M'N - N'M}{M' - M} = x'$. Per la qual cosa l' ammessa ipotesi non potrà sussistere, se pur non sussista l' equazione $\frac{m'n - n'm}{m' - m} = \frac{M'N - N'M}{M' - N}$, ed i membri di essa non abbiano un valore finito. Che se avessero valore infinito, essendo finite le quantità m, m', n, n', M, M', N, N', ciò non potrebbe avvenire se non per essere $m' = m$, $M' = M$, ed in tal caso le rette sarebbero paralelle (*n.*° 31).

34. Si cerchi l' espressione dell' angolo che formano le due rette Π . Π' proposte nel (*n.*° *prec.*).

Se pel punto O comune origine delle coordinate (*n.* 7) s'intenda condotta una retta cui chiameremo OL, paralella alla Π, ed una OL' paralella alla Π', l' angolo compreso in O dalle due rette immaginate OL, OL' sarà eguale al cercato, cui chiameremo φ. In oltre le equazioni della OL' saranno $x' = m'y'$, $x' = M'z'$; (*n.*ⁱ 13, 31) quelle della OL saranno $x = my$, $x = Mz$. Pongansi terminate le OL, OL' rispettivamente ne' punti L, L' egualmente distanti dal piano C, cioè sia $z = \beta = z'$ essendo z la coordinata del punto L, z' quella del punto L' relativamente al piano C ed i punti L, L' siano congiunti da una retta LL'. Sarà formato un triangolo, i lati del quale sono la retta LL', la retta OL, e la retta OL'.

$$\text{Abbiamo, } (n.° 23),\ \overline{OL}^2 = \beta^2 \left(1 + M^2 + \frac{M^2}{m^2} \right),$$

$$\overline{OL'}^2 = \beta^2 \left(1 + M'^2 + \frac{M'^2}{m'^2} \right),\ \overline{LL'}^2 = \beta^2 \left((M' - M)^2 + \left(\frac{M'}{m'} - \frac{M}{m} \right)^2 \right).$$

Abbiamo ancora $\cos.\varphi = \frac{\overline{OL}^2 + \overline{OL'}^2 - \overline{LL'}^2}{2OL \,.\, OL'}$; si avrà

dunque $\cos.\varphi \frac{m'm + m'm \,.\, M'M + M'M}{\sqrt{(m^2 + M^2m^2 + M^2)(M'^2 + m'^2M'^2 + m'^2)}}$.

Perciò se l' angolo φ sia retto, dovrà essere $\cos.\varphi = 0 = 1 + M'M + \frac{M'M}{m'm}$. In ogni altro caso, uno dei valori che ha il secondo membro dell' equazione precedente pel doppio segno del radicale, sarà il valore di $\cos.\varphi$ e l' altro sarà quello del suo supplemento. Se poi debbasi usar l' uno, o l' altro si conoscerà dall' essere $\overline{LL'}^2 > 0 <$ di $\overline{OL}^2 + \overline{OL'}^2$.

35. Per un dato punto, che si chiamerà L, condurre una retta, cui chiameremo Π' che formi un' angolo dato φ con una data retta Π.

Siano $x = my + n, x = Mz + N$ le due equazioni della data retta Π; $x' = m'y' + n'$, $x' = M'z' + N'$ quelle della cercata Π'; α, β, γ le coordinate del punto dato L.

Le due equazioni della cercata retta Π' devono sussistere ponendo $x' = \alpha$, $y' = \beta$, $z' = \gamma$, per esser L un punto della retta stessa; quindi ricaveremo le due equazioni

I^a $$n' = \alpha - m'\beta, \; N' = \alpha - M'\gamma.$$

Per ciò che fu dimostrato (*n.* 33), deve aver luogo l' equazione

II^a $$\frac{m'n - n'm}{m' - m} = \frac{M'N - N'M}{M' - M}.$$

Posti in essa i valori di n', N', ricavati dalla I^a e fatto per brevità $n + m\beta = p$, $N + M\gamma = q$, si otterrà

III^a $$M' = \frac{m'.M.(p - \alpha)}{m'(p - q) + m(q - \alpha)}.$$

Sostituito questo valore nell' espressione di $\cos.\varphi$ ritrovata (*n.* 34). e fatto $p - \alpha = A$, $p - q = B$, $q - \alpha = C$, $= A - B$, $m^2 + m^2M^2 + M^2 = D$, si avrà

IV^a $$m'^2((M^2A^2 + B^2)D.\cos.^2\varphi - m^2(M^2A + B)^2) - 2m'm((M^2A + m^2C)(M^2A + B) - BCD\cos.^2\varphi) = (M^2A + m^2C)^2 - (M^2A^2 + m^2C^2)D\cos.^2\varphi.$$

Pos-

Posto per tanto $= P$ il coefficiente di m'^2, posto $= 2R$ quello di m', ed il secondo membro dell' equazione $= S$, sarà $m' = \frac{R}{P} \pm \sqrt{\frac{SP + R^2}{P^2}}$.

Da questo risultato apparisce che essendo generalmente duplice il valor di m', duplici ancora dalle equazioni III^a e I^e si ricaveranno i valori degli altri coefficienti M', n', N', dal che si vede che due rette Π' soddisferanno al quesito, come di già si sapeva dagli elementi ordinari della Geometria piana.

Per ottenere le coordinate del punto d' incontro fra le due rette Π, Π' si porrà uno dei trovati valori di m' nell' equazione III^a e da essa avremo il corrispondente valore di M'. Coi valori di m', M' ricaveremo dalle equazioni I^e, quelli di n' ed N', e conosciuti i valori di m', M', n', N' si avrà in qualsivoglia dei due membri dell' equazione II^a il valore della coordinata x' ($n.°$ 33), ovvero della x ad essa eguale. Noto poi x' nelle equazioni della retta Π', ovvero x nelle equazioni della Π, si otterranno i valori delle $y'=y$ e $z'=z$.

36. Quando $\varphi = 90°$, sarà $\sqrt{\left(\frac{PS + R^2}{P^2}\right)} = 0$, e quindi $m' = \frac{R}{P}$, d' onde coll' ordine indicato si risale all' unico sistema di equazioni che determina l' unica retta Π' normale alla proposta Π.

37. Se le due equazioni di una retta siano $x = my + n$, $z = Q$, indicheranno evidentemente che la retta è parallela al piano C, cui si riferisce la coordinata z costante, essendo la distanza di questa retta in tutti i punti eguale alla data lunghezza costante Q. Se pongasi essere $Q = 0$, la retta obbiettiva sarà nel piano C.

Adunque se siano dati i due sistemi d' equazioni
I° $x = my + n$, $z = Q$; II° $X = m'Y + n'$, $Z = Q = z$

essi indicheranno due rette che giacciono in un piano paralello al piano C e posto alla distanza Q dal medesimo.

La coordinata x corrispondente al loro punto d'incontro si otterrà pure in questo caso dalla formula $x = \frac{nm' - n'm}{m' - m}$ (*n.*° 33), che non dipende da Q.

Parimenti la coordinata $y = \frac{n - n'}{m' - m}$. Ma l'angolo che formano insieme implica nella sua espressione M, M' (*n.*° 34) che dipendono da Q.

Per valersi della formola esprimente cos.φ (*n.*° 34) convien dunque ridurre l'equazione seconda del sistema I° alla forma $x = Mz + N$, e la seconda del sistema (II°) alla forma $X = M'Z + N'$. Saranno determinati i coefficienti M, N, M', N' se faremo in primo luogo $z = \frac{x - N}{M} = Q$; E perchè possa sussistere l'equazione sotto cotal forma, è chiaro che in essa dovrà essere $\frac{x}{M} = 0$, qualunque valore finito si attribuisca ad x. Dunque dovrà essere $M = \infty$ Ma dovendo altresì essere $-\frac{N}{M} = Q$, è d' uopo che ancora sia $N = \infty$.

Ponendo adunque $M = \frac{1}{0}$, $N = -\frac{Q}{0}$, e similmente ritrovati i valori di M', N', saranno soddisfatte tutte le necessarie condizioni. Ciò posto la formola esprimente cos.φ diviene

$$\frac{m'm \, . \, M'M + M'M}{\sqrt{(M^2 . m^2 + M^2)(M'^2 m'^2 + M'^2)}} = \frac{m'm + 1}{\sqrt{(m^2 + 1)(m'^2 + 1)}} .$$

38. Per accertarci che questo risultato sia vero, immaginiamo il piano in cui giacciono le rette proposte, e le intersezioni del medesimo coi piani

A, B siano rappresentate (Fig. 3) dalle TT′, VV′. Le supposte rette obbiettive siano rappresentate dalle $\pi\beta$, $\pi\gamma$, essendo in π il loro punto d' incontro scambievole, e β, γ que' punti ove incontrano la VV′. Cπ rappresenterà la coordinata x relativa al punto π, la $\tau\pi$ rappresenterà la corrispondente coordinata y.

Le due rette nel loro piano saranno rappresentate dalle rispettive equazioni $x=my+n$, $X=m'Y+n'$. Il punto β dove la prima incontra la V′V sarà determinato ponendo $y=0$, d' onde viene $x=n=O\beta$. Similmente ricaveremo dalla seconda $X=n'=C\gamma$. Se pertanto si chiami x la coordinata $O\tau$ corrispondente al punto d' intersezione π, sarà $\beta\tau=x-n$,

$$\tau\gamma=x-n',\ \beta\gamma=n'-n,\ \beta\pi=\sqrt{(x-n)^2+y^2}=(x-n)\sqrt{1+\frac{1}{m^2}},$$

$$\gamma\pi=\sqrt{(x-n')^2+y^2}=(x-n')\sqrt{1+\frac{1}{m'^2}},\ \cos.\varphi=\frac{\overline{\beta\pi}^2+\overline{\gamma\pi}^2-\overline{\beta\gamma}^2}{2\beta\pi\cdot\gamma\pi}$$

$$=\frac{(x-n)^2\left(1+\frac{1}{m^2}\right)+(x-n')^2\left(1+\frac{1}{m'^2}\right)-(n'-n)^2}{2(x-n)(x-n')\sqrt{\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\left(1+\frac{1}{m'^2}\right)}}.$$

Ma $x-n=-\frac{(n'-n)m}{m'-m}$, $x-n'=-\frac{(n'-n)m'}{m'-m}$ ($n.^o$ 33);

sostituiti questi valori, e ridotta la formola ai minimi termini, si troverà come sopra

$$\cos.\varphi=\frac{1+m'm}{\sqrt{(1+m^2)(1+m'^2)}}.$$

39. Se il caso proposto fosse rappresentato dalle due $\beta\pi$, $\gamma'\pi$ in vece delle due $\beta\pi$, $\gamma\pi$, sarebbe d'uopo mutare il segno del coefficiente m', siccome è chiaro ($n.^i$ 31, 14). Allora si avrebbe

$x-n = \frac{(n'-n)m}{m'+m}$, $x-n' = \frac{(n'-n)m'}{m'+m}$, e adoperati questi valori nella formola di cos.φ, essa darebbe
$\cos.\varphi = \frac{1-m'm}{\sqrt{(1+m^2)(1+m'^2)}}$ com' è la superiore (*n.*° 38), se in essa ponghiamo $-m'$ in luogo di m'.

40. Quando una delle equazioni rappresentanti una linea curva, esprima un valore costante per una delle tre coordinate, si può stabilire relativamente alla curva una conclusione analoga a quella che nel (*n.*° 37) abbiamo fatto relativamente ad una retta.

Siano per es. le due equazioni $z=p$, $F(x,y)=0$, rappresentando col simbolo $F(x,y)$ una funzione delle due coordinate x, y.

Egli è manifesto che qualunque sia la relazione alla quale sono obbligate le due coordinate x, y, il punto mobile che descrive la supposta obbiettiva (*n.*° 11) nello spazio, ubbidendo alla legge costituita fra le coordinate x, y, z, dalle date equazioni rimarrà sempre alla medesima distanza p dal piano C. Dunque la linea descritta da tal punto sarà in un piano parallelo al piano C.

La forma poi della linea stessa verrà determinata solamente dalla equazione $F(x,y)=0$.

Laonde si fa palese che il metodo di rappresentare per mezzo di due coordinate quelle linee le quali possono essere descritte in un piano, non è propriamente se non l' applicazione del metodo generale delle tre coordinate ad un caso particolare ove una di esse è $=0$.

ARTICOLO III.

Della Superficie.

41. Come abbiamo immaginato descriversi nello spazio una linea col movimento di un punto (*n.*° 11), in modo analogo possiam concepire descritta o generata una superficie col movimento d' una linea.

Nella descrizione d' una linea, il punto descrittore non essendo dotato di estensione e figura, la linea descritta non dipende se non dal movimento del punto descrittore medesimo. Nella descrizione della superficie la linea generatrice avendo una forma e grandezza, o costante o variabile, la superficie generata o descritta dipende insieme dal movimento e dalla forma e grandezza della linea generatrice, o descrivente.

42. Ponghiamo per cagione d' esempio essere la linea generatrice un circolo di dato diametro costante. Movasi in modo che il suo piano rimanga sempre a se medesimo paralello, il suo centro, ed ogni punto della circonferenza descrivano rette linee. La superficie generata, o percorsa dalla circonferenza di tal circolo sarà cilindrica: retta od obbliqua, secondo che perpendicolare, od obbliquo sarà il piano del circolo generatore per rispetto alla retta percorsa dal suo centro.

Ponghiamo che il circolo stesso descriva col suo centro un' altra circonferenza circolare alla quale sia sempre normale il piano di esso circolo generatore; la superficie generata sarà anulare.

Ponghiamo che stando immobile un diametro del circolo generatore, questo roti intorno a quel

diametro; la superficie generata sarà sferica.

Ponghiamo ancora che il centro descrivendo una retta, il piano rimanendo sempre a se medesimo paralello, il diametro scemi, o cresca successivamente con certa legge; la superficie generata varierà in un numero indefinito di maniere, essendo indefinito il numero delle condizioni secondo le quali può variare il predetto diametro. Se le grandezze di questo procedano come le distanze del centro da un punto determinato della retta ch' esso descrive, la superficie generata sarà conica.

43. Immagino collocata nello spazio una superficie qualsivoglia. La tocchi un certo piano Π paralello ad uno dei piani coordinati, per es. al piano C. Se il piano Π si mova paralellamente a se stesso, segando sempre in ogni sua posizione la proposta superficie obbiettiva, ciascheduna sezione potrà essere considerata come la generatrice della detta superficie obbiettiva (*n.*° 41), ed un' espressione analitica, per mezzo della quale possa essere determinata ciascheduna delle indicate sezioni, determinerà pure la forma, grandezza, e posizione della supposta superficie obbiettiva, perchè tutte quelle sezioni non potran essere comuni a diverse superficie.

Ma le mentovate sezioni si pongono costituite in piani paralelli al piano C, dunque ciascheduna di esse sarà espressa da due equazioni, una delle quali sarà della forma $z=p$, l' altra sarà della forma $F(x, y)=o$ (*n.*° 40).

L' espressione poi che rappresenta la superficie obbiettiva, per le cose che abbiamo superiormente osservate, deve prendere la forma $F(x,y)=o$ allorchè in essa sostituiscasi a z uno dei valori, de' quali questa coordinata è suscettibile. Fatto lo stesso ragionamento per rispetto alla coordinata x, conchiuderemo che l' espressione rappresentante la

superficie obbiettiva deve prendere la forma $F(y, z)$ se in essa pongasi un valore p' di cui è suscettibile x, invece della stessa x. Similmente conchiuderemo che l' espressione suddetta deve prendere la forma $F(x, z)$ ponendo in essa un valore p'' di cui sia suscettibile la y invece della stessa y. Dunque l'espressione rappresentante una superficie qualunque sarà sempre compresa in un' equazione della forma $F(x, y, z) = 0$, intendendo nel simbolo che costituisce il primo membro una funzione contenente le tre coordinate variabili x, y, z.

44. Sia proposta l'equazione $ax + by + cz + d = 0$. Se pongasi in essa $z = p$, diverrà $ax = -by - d - cp$. Questa equazione dovendo sussistere insieme coll' altra $z = p$, ambedue insieme rappresenteranno una retta linea parallela al piano C (*n.*° 37). Dunque la sezion piana fatta nella superficie obbiettiva paralellamente al piano C, ed alla distanza p da esso è una linea retta.

Similmente si troverà essere una retta linea la sezion piana fatta paralellamente al piano B ed alla distanza q da esso, come pure una retta la sezion piana fatta paralellamente al piano A e ad una dittanza s dal medesimo. Alla stessa conclusione riesciremo ponendo prima $z = p'$, poi $y = q'$, indi $x = s'$ ec. Dunque ogni sezion piana della superficie obbiettiva, fatta paralellamente ad uno de' piani coordinati è una retta linea. In oltre attribuendo qualunque valore reale ad una delle coordinate, sempre reali riescono i valori delle altre due nella equazione risultante, dunque la superficie obbiettiva si estende indefinitamente per ogni verso, perchè a qualunque distanza da qual si voglia dei piani coordinati, essa incontra un piano secante paralello al piano coordinato medesimo.

Tutte le rette che nascono per le sezioni piane fatte sulla superficie obbiettiva paralellamente ad uno dei piani coordinati sono paralelle fra lo-

ro, atteso che i coefficienti delle variabili rimangono costanti nelle equazioni dalle quali esse rette sono rappresentate, come è facile vedere nel caso supposto che i piani secanti sian paralelli al piano C.

Le equazioni rappresentanti due successive sezioni fatte alle distanze rispettive p, p' saranno

$$ax = -by - d - cp\,, \quad z = p$$
$$ax = -by - d - cp', \quad z = p'$$

e quindi le rette rappresentate da tali equazioni sono tra di loro paralelle (*n.*° 31), e così dicasi di quante altre si voglia. Ma tutte le rette stesse devono passare per quella dove la superficie obbiettiva è tagliata da uno dagli altri due piani coordinati B, A; dunque tutte le rette che nascono tagliando la superficie obbiettiva con piani paralelli ad uno dei coordinati sono costituite in un medesimo piano, e perciò la superficie rappresentata dalla equazione $ax+by+cz+d=0$ è un piano.

45. E chiaro che se nell'equazione precedente suppongasi una delle variabili elevata ad una potenza qualunque superiore, o inferiore alla prima, l'equazione più non soddisfa a tutte le condizioni osservate. Adunque l'equazione rappresentante un piano dovrà necessariamente avere le variabili al primo grado.

46. Sia proposta l'equazione

(D) $\quad (2r-(z-l))(z-l)-(x-a)^2-(y-b)^2=0.$

Se pongasi $z=l$, sarà $(x-a)^2+(y-b)^2=0$, ciocchè non può avverarsi quando non sia $x=a$, $y=b$. Dunque alla coordinata $z=l$ corrisponde nella superficie obbiettiva un solo punto, e le tre coordinate di esso sono $x=a$, $y=b$, $z=l$.

Posta $z=2r+l$ sarà pure in tal caso $(x-a)^2+(y-b)^2=0$. Dunque ancora alla coordinata $z=2r+l$

corrisponde un solo punto, del quale le tre coordinate sono $x = a$, $y = b$, $z = 2r + l$.

Perciò la retta la quale congiunge i due mentovati punti sarà $= 2r + l - l = 2r$ (n.° 30), ed avendo ambedue gli estremi egualmente distanti dal piano A, ed egualmente distanti dal piano B, sarà paralella all'intersezione dei piani A,B, cioè normale al piano C.

Ora immaginiamo un piano A' paralello al piano A e posto alla distanza a da esso. Le coordinate della superficie obbiettiva riferite al piano A' saranno $(x - a) = X$ (n.° 30). Similmente immaginato un piano B' paralello al piano B e posto alla distanza b da esso, le coordinate riferite al piano B' saranno $(y - b) = Y$. In fine immaginato un terzo piano C' paralello al piano C e posto alla distanza $r + l$ da esso, le coordinate riferite al piano C' saranno $(z - (r + l)) = Z$.

Ciò posto, la data (D) si trasforma nell'equazione

$$\text{(E)} \quad (r - Z)(r + Z) = X^2 + Y^2.$$

Apparisce evidentemente che la retta determinata di sopra dai sistemi

$$x = a, \; y = b, \; z = l$$
$$x = a, \; y = b, \; z = 2r + l$$

coincide colla intersezione dei due piani A', B'. In oltre è chiaro che il punto comuno al nuovo sistema di piani coordinati A', B', C' divide per mezzo l'accennata retta. Imperciocchè quando $z = l$ sarà $Z = -r$, e quando $z = + 2r + l$, sarà $Z = r$.

Attribuito per tanto alla variabile Z qualunque valore p, ammissibile nella equazione (E), sarà $r^2 - p^2 = P^2 = X^2 + Y^2$, equazione che deve sussistere insieme coll' altra $Z = p$. Laonde la sezion piana fatta nella superficie obbiettiva paralellamente al piano C', ed alla distanza p da esso è una linea (n.° 43) espressa dalle due equazioni $Z = p$, $X^2 + Y^2 = P^2$.

Ma la seconda di queste equazioni denota che la linea supposta ha tutti i suoi punti alla distan-

za P dalla comune origine delle coordinate X, Y considerate nel piano della stessa linea obbiettiva, dunque essa è un circolo che ha il semidiametro $=P=\sqrt{(r^2-p^2)}$ ed il centro determinato dalle coordinate X=o, Y=o, Z=o, riferite ai piani A′, B′, C′.

Se pongasi ancora

$$(E') \qquad (r-Z')(r+Z')=Y'^2+X'^2=P'^2Y'^2,$$

l' equazione (E′) rappresenterà un' altra sezione circolare paralella alla prima, il suo semidiametro sarà $=P'$, ed il centro sarà determinato dalle X′=o, Y′=o, Z′, parimenti riferite ai piani A′, B′, C′. Le lunghezze P, P′ eguaglieranno rispettivamente le coordinate d'un semicircolo dal diametro $=2r$, corrispondenti, la prima all' ascissa $=Z$, la seconda all' ascissa $=Z'$, facendo origine dal centro.

Adunque se sulla retta, gli estremi della quale sono determinati dai due sistemi di coordinate

$$x=a\,,\ y=b\,,\ z=l\,,$$
$$x=a\,,\ y=b\,,\ z=2r+l\,,$$

ed eguaglia $2r$, come abbiamo veduto, si concepisca descritto un semicircolo, il quale si faccia rotare intorno ad essa come asse, ciascun punto della semicirconferenza, descriverà nello spazio una circonferenza circolare, la quale coinciderà con una delle sezioni piane che ponno esser fatte nella superficie obbiettiva paralellamente al piano C, oppure al piano C′. Dunque la detta superficie è quella d'una sfera, il cui diametro eguaglia $2r$, ed il centro è il punto comune ai tre piani A′, B′, C′, cioè viene determinato dalle tre coordinate $x=a$, $y=b$, $z=r+l$ riferite ai piani A, B, C.

47. Sia proposta l' equazione

$$(H) \quad (x-(Bz+C))^2+(y-(Ez+F))^2-\frac{R^2}{L^2}(z-L)^2=o.$$

I. Posta $z=p$, l' equazione che ne risulta rappresenta un circolo (*n.*° 46). Dunque la sezion piana paralella al piano coordinato C è sempre un

circolo, il cui raggio è generalmente $\frac{R}{L}(z-L)$ ed il cui centro è determinato dalle coordinate $x=(Bz+C)$, $y=(Ez+F)$, $z=z$.

II. Posta $z=L$, l' equazione (H) diviene $(x-(BL+C))^2+(y-(E+F))^2=o$, la quale non può sussistere se non essendo $x=BL+C$, $y=EL+F$. Dunque la superficie obbiettiva rappresentata dalla equazione (H) ha un vertice determinato dalle coordinate $x=BL+C$, $y=EL+F$, $z=L$.

III. A qualunque valore reale della z corrisponde un sistema di valori reali per le altre due x, y. Dunque la superficie obbiettiva si estende indefinitamente.

IV. Fatta $z=p$ e trasformata l' equazione (H) nella

$$(G)\quad (x-(Bp+C))^2+(y-(Ep+F))^2-\frac{R^2}{L^2}(p-L)^2=o,$$

se facciasi $z=p'$, otterremo la

$$(K)\quad (x-(Bp'+C))^2+(y-(Ep'+F))^2-\frac{R^2}{L^2}(p'-L)^2=o.$$

Ciascheduna di tali, equazioni rappresenta un circolo: il semidiametro del primo sarà $\frac{R}{L}(p-L)$ quello del secondo sarà $\frac{R}{L}(p'-L)$. Dunque i circoli che nascono per le sezioni piane parallelle al piano coordinato C hanno i loro semidiametri proporzionali alle distanze dei rispettivi piani dal vertice della superficie obbiettiva.

V. Fatto $z=o$ si ottiene

$$(Q)\quad (x-C)^2+(y-F)^2-R^2=o,$$

equazione rappresentante sul piano C un circolo dal semidiametro R ed il cui centro è determinato dalle coordinate $x=C$, $y=F$, $z=o$.

VI. Rappresentando la retta che passa pel vertice (*n.*° 47) e pel centro del circolo testè definito

(*n.*° 47) per mezzo delle equazioni $x=my+n$; $x=Mz+N$; (*n.*° 32) sarà $m=\frac{B}{E}$, $n=\frac{CE-BF}{E}$, $M=B$, $N=C$.

Perciò volendo esprimere in funzioni di z ciascheduna delle altre due coordinate spettanti a questa retta, sarà $x=Bz+C$, $y=Ez+F$, $z=z$. Ma dall' equazione (H) abbiamo già dedotto che i centri delle immaginate sezioni circolari sono determinati dalle rispettive coordinate; $x=Bz+C$, $y=Ez+F$, $z=z$. Dunque il centro d' ogni sezione è nel punto dove il piano secante taglia la retta che abbiamo di sopra determinata, la quale si rappresenta dalle equazioni $x=\frac{By+CE-BF}{E}$, $x=Bz+C$; e quindi tal retta potrà essere chiamata l' asse della superficie obbiettiva.

Da tutti i caratteri che abbiamo conosciuti nella equazione (H) risulta ch' essa rappresenta una superficie conica (*n.*° 42).

48. Se pongasi $L=\infty$, l' equazione (H) si cangia nella

$$(\Delta) \quad (x-(Bz+C))^2+(y-(Fz+F))^2-R^2=0$$

la quale rappresenta un circolo dal costante raggio R qualunque grandezza si attribuisca alla coordinata z.

La retta determinata (*n.*°47, VI) non dipende da L, e perciò sarà rappresentata dalle medesime equazioni di prima e tutti i centri delle sezioni circolari dal raggio R si troveranno in essa.

Adunque l' equazione (Δ) rappresenta una superficie cilindrica, il cui circolo generatore ha il semidiametro $=R$, e movendosi paralellamente al piano C descrive col suo centro la retta definità nel (*n.*°, 47 VI), la quale perciò sarà l' asse della detta superficie.

49. Gli angoli che forma l' asse sopra indicato coi piani coordinati si dedurranno dalle equazioni

dell'asse medesimo col metodo insegnato dal (*n.*° 24).

Ma quando sia normale al piano C conviene che dalle sue equazioni risulti $x-x'=o$, $y-y'=o$ e quindi B=o, E=o.

Similmente dedurremo il carattere indicante quando l'asse è perpendicolare ad uno degli altri piani coordinati. Con quest' indizio si determinerà prontamente quali termini devon mancare nelle equazioni (H), (Δ) quando si avveri il supposto caso, e quindi potremo da esse immediatamente intendere quando l'asse trovisi o no perpendicolare ad alcuno dei piani coordinati.

Per le medesime ragioni che furono addotte nel fine del (*n.*° 22) ci asterremo dall' ulteriore analisi delle superficie curve, rivolgendo piuttosto la nostra attenzione alle piane.

50. Trovar le equazioni di una retta che dall' origine delle coordinate cada perpendicolare sopra un dato piano.

L'equazione del dato piano, sia

$$\text{(D)} \quad ax+by+cz+d=o,$$

e sia (E) ($x=m'y$, $x=M'z$) quel sistema di equazioni che determina la retta cercata, cui nomineremo P.

Se per essa intendasi condotto un piano Π normale al piano coordinato C, sarà pure normale al piano obbiettivo, e quindi l' intersezione del piano Π col piano C, cioè la projezione della retta P sullo stesso piano C sarà normale all' intersezione del piano obbiettivo col piano C. Similmente ragionando si conchiuderà essere la projezione della retta P sul piano B normale all' intersezione dello stesso piano B col piano obbiettivo. Posta ora $z=o$ nell' equazione (D) avremo

$$\text{(F)} \quad x=\frac{-by-d}{a}$$

equazione rappresentante l' intersezione del piano C col piano obbiettivo (*n.*° 44). Inoltre la (G) $x=m'y$ sarà quella che rappresenta sul piano C la

projezione della retta P. Adunque dalla formola esprimente cos. φ (*n.*° 38) avremo $1 + m'm = 0$ essendo nel caso nostro cos. $\varphi = 0$. Posto dunque $m = -\frac{b}{a}$ come esige l' equazione (F), ne ricaveremo $m' = \frac{a}{b}$. Similmente si troverà $M' = \frac{a}{c}$: quindi le equazioni (E) divengono

$$(S) \quad x = \frac{a}{b} y, \; x = \frac{a}{c} z.$$

51. Si troveranno le coordinate del punto dove una retta data qualunque, e per conseguenza ancora la normale determinata (*n.*° 50), incontra il piano abbiettivo, ponendo nell' equazione (D) i valori di y, z espressi in funzioni di x per mezzo delle equazioni rappresentanti la data retta, e nel caso presente per mezzo delle equazioni (E). Avremo pertanto $ax + \frac{b^2x}{a} + \frac{c^2x}{a} + d = 0$, d' onde si ottiene $x = -\frac{ad}{a^2+b^2+c^2}$. Con questo valore sostituito nelle equazioni (E) troveremo le altre due coordinate $y = -\frac{bd}{a^2+b^2+c^2}$, $z = -\frac{cd}{a^2+b^2+c^2}$.

52. Si concepisca il triangolo rettangolo formato dalla predetta normale P (*n.*° 50) e dalle due rette nelle quali l'immaginato piano Π taglia rispettivamente il piano obbiettivo, ed il piano C. In questo triangolo, l' angolo acuto adjacente alla normale, misura l' inclinazione della medesima col piano C, l' altro angolo acuto misura l' inclinazione del piano obbiettivo collo stesso piano C.

Similmente si trova che gli angoli, i quali rispettivamente misurano l' inclinazione del piano obbiettivo cogli altri due piani coordinati, sono complementi degli angoli, i quali misurano l' inclinazione

della normale P cogli stessi piani. Per la qual cosa, assumendo la retta P come raggio, le coordinate del suo punto d' incontro col piano obbiettivo corrisponderanno ordinatamente ai coseni degli angoli che forma lo stesso piano obbiettivo coi piani coordinati. Si chiamino μ, ν, ι gli angoli rispettivamente formati coi piani A, B, C. La lunghezza della retta P sarà $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2+c^2} = -\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. ($n.^o$ 30). Quindi avremo . . . .

$$\cos.\mu = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos.\nu = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos.\iota = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Da questo e dal ($n.^o$ 25) si deduce che nominato ϕ l' angolo che forma la diagonale del cubo con una delle sue faccie, sarà $270^o - 3\phi$ la menoma somma che formar possano i tre angoli, μ, ν, ι, e 180^o la massima.

Se uno degli angoli mentovati sia retto, per es. quello col piano C; sarà la corrispondente quantità $c=0$. Se il piano obbiettivo sia paralello ad uno de' piani coordinati, i coefficienti delle coordinate riferite agli altri due saranno nulli. Per es. se il piano obbiettivo sia paralello al piano A, sarà $c=b=0$, talchè alla semplice ispezione dell' equazione (D) potremo conoscere se il piano da essa rappresentato sia perpendicolare o paralello ad alcuno dei piani coordinati.

53. Dati due piani per mezzo delle equazioni corrispondenti

(D) $ax+by+cz+d=0$, (E) $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$: determinare la scambievole intersezione di essi e l'angolo della reciproca inclinazione.

Quanto alla prima parte del quesito, è chiaro che dovendo essere comuni all' una ed all' altra equazione le coordinate che appartengono all' intersezione cercata, basterà eliminare una delle coordinate stesse per ottenere dalle due date equazioni una risultante che rappresenti una projezione della retta cercata. Perciò eliminata z avremo

$$x(a\gamma - \alpha c) = y(\beta c - b\gamma) + (\delta c - d\gamma)$$

ed eliminata y avremo

$$x(a\beta - \alpha b) = z(\gamma b - c\beta) + (\delta b - d\beta):$$

equazioni determinanti la cercata retta di intersezione.

Passando alla seconda parte del quesito, pel punto O, comune origine delle coordinate, s' intendano condotte due rette (*n.*° 50) P, Π, la prima delle quali sia perpendicolare al piano che si rappresenta dall' equazione (D), l'altra sia perpendicolare a quello che si rappresenta dall'equazione (E). L' angolo formato in O dalle due rette accennate eguaglia il supplemento di quello che si cerca. Tutto dunque si riduce a trovar l' angolo formato dalle due rette P, Π. Posto pertanto le equazioni della P essere, $x = my$, $x = Mz$, quelle della Π essere $x = m'y$ $x = M'z$ avremo (*n.*° 50) $m = \frac{a}{b}$, $M = \frac{a}{c}$, $m' = \frac{\alpha}{\beta}$, $M' = \frac{\alpha}{\gamma}$. Questi valori applicati alla formola del (*n.*° 34) danno il valore di $\cos.\varphi$, e $180° - \varphi$ sarà l' angolo cercato.

54. Data l' equazione d' un piano

$$\text{(D)} \qquad ax + by + cz + d = 0$$

e le equazioni d' una retta P

$$x = my + n, \quad x = Mz + N$$

trovar l' angolo che forma la retta P, col piano D.

Se sul punto dove la retta P incontra il piano D s' intenda eretta una perpendicolare al piano stesso, l' angolo compreso da essa perpendicolare e dal-

dalla P sarà complemento di quello che si cerca. Questo complemento sarà eguale all' angolo compreso da due rette condotte per l'origine delle coordinate, l'una paralella alla P, l'altra normale al piano D.

Le equazioni della prima saranno

$$x = my\,,\ x = Mz$$

($n.^o$ 31); quelle della seconda saranno

$$x = \frac{a}{b}y\,,\ x = \frac{a}{c}z$$

($n.^o$ 50). L'angolo φ compreso da queste rette sarà determinato dalla formola del ($n.^o$ 34), e $90^o - \varphi$ sarà l'angolo cercato.

55. Dato il sistema delle equazioni

$$(P) \qquad x = my + n\,,\ x = Mz + N$$

e quello delle

$$(Q) \qquad x = m'y + n'\,,\ x = M'z + N'$$

rappresentanti due rette che non siano poste in un medesimo piano; determinare quella retta che è comune normale ad ambedue le date.

Le equazioni della retta cercata saranno della forma

$$(R) \qquad x = m''y + n''\,,\ x = M''z + N''$$

Sarà dunque soddisfatto il quesito se siano determinati i valori dei coefficienti m'', n'', M'', N''.

Dovendo la retta cercata R incontrar ciascheduna delle date P, Q avremo le due seguenti equazioni ($n.^o$ 33)

$$\frac{m''n - n''m}{m'' - m} = \frac{M''N - N''M}{M'' - M}$$

$$\frac{m''n' - n''m'}{m'' - m'} = \frac{M''N' - N''M'}{M'' - M'}$$

dalle quali si ottengono i valori di N'', n''.

In oltre la retta cercata R forma angoli retti con ciascheduna delle due date. Adunque (*n.*° 34) avremo

$$m\,m''+M\,M''\,.\;m\,m''+M\,M''=0$$
$$m'm''+M'M''\,.\;m'm''+M'M''=0$$

dalle quali equazioni si ottengono i valori di m'', M''.

CAPITOLO IV.

Sulla Commutazione delle coordinate.

56. Per mezzo delle corrispondenti equazioni, dati tre piani che passino per un medesimo punto comune; trasportare ad essi le coordinate. Si chiamino A', B', C' i nuovi tre piani e l'equazione, o il sistema di equazioni, per cui mezzo si determina un dato oggetto, riferendo le sue coordinate ortogonali x, y, z ai soliti piani A, B, C rapprensentisi per mezzo del simbolo $f(x, y, z)$ cioè funzione delle quantità x, y, z.

Chiameremo I un punto determinabile per mezzo di $f(x, y, z)$ e supporremo essere $x'=t$, $y'=s$, $z'=u$ le coordinate del punto I riferite ai piani A, B, C. Dalle date equazioni corrispondenti ai nuovi piani coordinati si dedurranno quelle che determinan le scambievoli intersezioni di essi (*n.*° 53).

Avremo quindi le equazioni corrispondenti alle tre rette le quali dal punto I siano condotte ordinatamente paralelle alle intersezioni predette (*n.*° 31).

Ciascheduna di tali rette incontrerà uno dei piani A', B', C' ad essa opposto e le coordinate determinanti ciascun punto d' incontro rispettiva-

mente ai piani coordinati A, B, C si otterranno espresse per funzioni di t, s, u, (n.° 51).

Si chiamano rispettivamente X, Y, Z le porzioni delle mentovate rette che giacciono fra il punto I ed i piani A', B', C' da esse incontrati. Ciascheduna delle X, Y, Z si esprimerà per t, s, u, (n.° 30).

Adunque risulteranno tre diverse equazioni, ciascheduna delle quali contiene le t, s, u ed ogn' una di queste quantità indeterminate potrà col mezzo dell' eliminazione esprimersi per X, Y, Z.

Laonde se nella $f(x, y, z)$ sostituiscansi in luogo di $t = x$, $s = y$, $u = z$, i mentovati valori espressi per X, Y, Z sarà compiuta la dimandata commutazione.

Nella seguente tavola indicheremo l' ordine della risoluzione (a).

Indicando più brevemente i coefficienti, delle variabili u, t, s, queste equazioni si riducono alle tre seguenti

$$u\Delta - s\Psi - t\Pi + V = 0$$
$$u\Delta' - s'\Psi - t\Pi' + V' = 0$$
$$u\Delta'' - s\Psi'' - t\Pi'' + V'' = 0$$

e per mezzo delle medesime si ricaveranno i valori di t, s, u da sostituirsi in vece di x, y, z, nella $f(x, y, z)$, la quale diverrà F(X, Y, Z) cioè funzione di nuove coordinate relative ai tre piani A', B', C', paralelle rispettivamente alle loro intersezioni, e determinanti il medesimo oggetto che si rappresentava da $f(x, y, z)$.

57. Se siano scambievolmente normali i due piani A', B' (n.° 56), sarà retto l' angolo che nel (n.° 53) fu chiamato φ, e le equazioni delle due rette che lo comprendono saranno (n.° 50).

(a) Vedi la tavola che per comodo è stata posta in fine, dopo la quale continua il dettato.

$$x = \frac{a}{b} y, \quad x = \frac{a}{c} z$$

$$x = \frac{a'}{b'} y, \quad x = \frac{a'}{c'} z$$

Adunque (*n.*° 34) avremo $1 + \frac{aa'}{cc'} + \frac{bb'}{cc'} = 0$, cioè $aa' + bb' + cc' = 0$.

Considerando nel modo stesso le altre combinazioni binarie dei piani A', B', C' verremo a conchiudere che se tutti i tre nuovi piani siano tra loro scambievolmente normali debbono avverarsi le tre equazioni

$$aa' + bb' + cc' = 0$$
$$aa'' + bb'' + cc'' = 0$$
$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 .$$

58. Quando uno de' nuovi piani, per es. A' coincida con uno dei primi piani coordinati, per e. A, sarà $b = c = 0$ (*n.*° 52). Essendo in oltre $x = 0$ nell'equazione del piano A', essa darà $x = 0 = -\frac{d}{a}$.

Similmente se un altro dei nuovi piani per es. B' coincida con B, sarà $a' = c' = 0$ ed $y = 0 = -\frac{d'}{b'}$. Questi valori sostituiti nelle formule della tavola (*n.*° 56) le renderanno conformi alle particolari condizioni che abbiamo introdotte nel problema generale.

Di fatti, poichè nelle equazioni esprimenti la retta comune ai piani A', B' si pone $x = 0$, $y = 0$, questa retta coinciderà coll' intersezione dei due piani A, B, alla quale soltanto conviene la condizione di $x = 0$, $y = 0$. Ma ciò deve appunto accadere se i piani A', B' rispettivamente coincidono con A, B, dunque la sostituzione di $x = 0$, $y = 0$ nelle citate formule (*n.*° 56) le ridurrà soddisfacenti al caso nostro. Per tanto poichè l'equasione $x = P''y + Q''$ diviene $0 = P'', 0 + Q''$, dovrà es-

sere $Q''=o$, e $P''=\frac{o}{o}$. Ciò si avrà sostituendo nelle espressioni di Q'' e P'' i valori che abbiamo determinati essendo $Q''=\left(\frac{d'c-c'd}{ac'-a'c}\right)=\left(\frac{d'o-od}{ao-oo}\right)=$ $\frac{d'-d}{a}=\frac{d'}{a}=o$ per essere $-\frac{d}{a}=o$ e quindi $a=-\frac{1}{o}$, onde $\frac{d'}{a}=-o$; in oltre $P''=\left(\frac{b'c-c'b}{ac'-a'c}\right)=$ $\left(\frac{b'o-oo}{ac-oo}\right)=\frac{b'}{a}=\frac{1}{o}\cdot\frac{o}{1}$, dovendo essere $-\frac{a'}{b'}=o$ e quindi $b'=-\frac{1}{o}$.

Passando all' equazione $x=K''z+L''$ troviamo ch' essa diviene $o=K''z+L''$. Adunque esser deve $L''=o$, e $K''=o$, d' onde poi $z=\frac{o}{o}$ cioè indefinita, come appunto conviene all' intersezione dei due piani A, B.

Tutte queste condizioni si adempiono colle predette sostituzioni nei valori di L'', K''. Imperciocchè $L''=\left(\frac{d'b-b'd}{ab'-a'b}\right)=\left(\frac{d'o-b'd}{ab'-oo}\right)=-\frac{d}{a}=o$, $K''=\frac{(c'b-b'c)}{ab'-a'b}=\left(\frac{oo-ob'}{ab'-oo}\right)=\frac{o}{a}=o$.

59. Si cerchin ora le equazioni della retta comune ai piani A'C', la quale sappiamo che nel supposto caso diviene l' intersezione dei piani A, C'.

Le equazioni $x=P'y+Q$, $x=K'z+L'$ divengono $o=P'y+Q'$, $o=K'z+L'$. Adunque sarà $Q'=o$, $L'=o$. Ma le equazioni $o=P'y$, $o=K'z$ non possono sussistere generali se pur non sia $P'=o$, $K'=o$: adunque $y=\frac{x}{P'}=\frac{o}{o}$, $z=\frac{x}{K'}=\frac{o}{o}$, cioè il valore di y e di z sarà sempre indefinito rispettivamente ad x che deve sempre esser nulla. Tutte queste particolarità si riscontrano facendo le mentovate

sostituzioni. Ma la relazione reciproca di y e z risulterà dall' equazione $yP' \cdot Q' = zK' + L'$, la quale ridotta alla più semplice espressione diviene $-(ac''-a''c)z = y(ab''-a''b) + (ad''-a''d)$ e fatte le sostituzioni, $-z(ac''-a''c) = y(ab''-a''o) + ad''+a''d$. cioè $-z = y\frac{ab''}{ac''} + \frac{ad''}{ac''} - \frac{a''d}{ac''} = \frac{yb'+d''}{c''}$ per essere $-\frac{d}{a} = o$, e quindi ancora $-\frac{a''d}{ac''} = o$.

Tale appunto è il risultato esprimente l'intersezione del piano A col piano C' del quale sia data l'equazione $a''x + b''y + c''z + d'' = o$.

Pag.	Linea	Errori	Correzioni
4	1	Condotta	Condotte
6	32	parallela VV″	parallela a VV′
7	11	in essa AP′	in essa aP′
11	7	projeziono	projezione
24	25	$\left\{\begin{array}{l}\text{sen.}^2 m = 1 = \text{cos.} \\ (n+f)\text{cos.}(t \backsim n),\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}\text{sen.}^2 m = 1 = \text{cos.} \\ (n+t)\text{cos.}(t \backsim n),\end{array}\right.$
26	4	$::h:t$	$::h:f$
28	2	Abbia la	Abbia le
	26	$q - \alpha = C$,	$q - \alpha = c$
42	7	$= P'^2 Y'^2$	$= P'^2$
43	5	$+ (y - (L + F))^2$	$+ (y - (EL + F))^2$
49	18	$x = \frac{By - CE - BF}{E} 1x$	$n = \frac{By - DE - BF}{E}, x$
51	3	si chiamano	si chiamino,

ELEMENTI

DELLA

GEOGRAFIA

E CANONI PRINCIPALI

DELLA TRIGONOMETRIA SFERICA

DI

CARLO BENFERERI

PROFESSORE DI FISICA

NELLA SCUOLA MILITARE D' ARTIGLIERIA E GENIO

DI MODENA

IN MODENA MDCCCVIII

PRESSO LA SOCIETÀ TIPOGRAFICA.

PREFAZIONE

Ad intendere le Carte geografiche, a distinguere in esse le differenti parti della superficie terrestre, a determinarne i limiti, a valutarne le situazioni basta solo di avere ben concepita la Sfera armillare, osservati i globi, e compreso il loro uso. Ma intender le Carte geografiche non è saper Geografia, come riconoscere i paesi descritti non è saperli descrivere, o situare al lor posto. Il volgo può esser contento del primo Studio, ma ai giovani colti dee interessare il secondo; massimamente a dì nostri, e nel vasto Impero di NAPOLEONE MASSIMO, dal quale chiamati a prender parte della militare carriera, ch' egli innalzò a tanta gloria, possono destinarsi a costruire mappe, a descriver provincie, a tener giornali di lontanissime spedizioni. Or questo studio, e queste pratiche dipendono da una moltitudine di cognizioni astronomiche, che nei libri, che diconsi di Geografia, non soglion trovarsi. Io ho però giudicato di far util cosa a raccoglierne in questo Scritto le principali, e le più interessanti, e presentarle sotto il titolo di *Elementi della Geografia sferica* alla gioventù dedicata all' onor militare. L' ordine, con cui le ho disposte, è quello, che mi è parso il più conforme alla brevità, e precisione, che mi ho prefisso. So che ad alcuno lo stile sembrerà troppo secco, e qualche vol-

ta anche aspro : ma io lo prego a riflettere in primo luogo, che nelle Scienze esatte il prolisso, e il particolarizzare nuoce alla nettezza delle idee, e ne interrompe la connessione; e secondariamente, ch'io suppongo il Lettore già accostumato alla precision matematica, e all'esercizio del ragionare più stretto; e finalmente che i passi, che potrebbero trovarsi difficili, debbano essere spianati da chi conosce già questa Scienza. Per accostumare all'esercizio dell' immaginazione troppo necessario in questa classe di Studj, non ho apposte che le figure, che ho trovato indispensabili all'intelligenza dei canoni della Trigonometria Sferica, colla quale dò compimento allo Scritto.

ELEMENTI

Della Geografia Sferica.

1. La *Geografia* non è propriamente che la descrizion della Terra. Il suo studio è diretto non solo a conoscere le posizioni scambievoli dei differenti luoghi della superficie terrestre, ma eziandio a determinare in ogni occasione il luogo di un suo punto qualunque per il solo aspetto del cielo. Senza di ciò nè potrebber dirigersi i lunghi viaggi, nè la suddetta descrizione avrebbe mai potuto eseguirsi. È però mestieri conoscere la figura della Terra, i di lei rapporti di posizione cogli astri, i varj suoi movimenti, e le vicende, che vi succedon per essi. Chiamo *elementi della geografia sferica* i principj di sì fatte cognizioni.

2. La Terra fu conosciuta rotonda, e assai poco meno che sferica. Il grado di un di lei circolo massimo definisce 60 miglia *geografiche*, dette anche *italiane*; da che se ne deduce il diametro di circa 6875 miglia all'incirca.

3. I monti, e le valli, ond'è per tutto sparsa la di lei superficie, non debbono valutarsi che come picciole scabrezze; poichè le cordiliere del Perù, che sono le più alte montagne, che si conoscano, non montano a più di miglia 3 $\frac{1}{4}$ dal livello del mare; meno cioè di quanto sarebbono delle picciole prominenze di mezzo millimetro sulla superficie di un globo del diametro d'un metro.

4. La gravità, o la forza, con cui tutti i corpi tendono a cadere in linea perpendicolare alla su-

perficie della Terra, cioè a dir verso il centro, forma la consistenza del di lei globo, e per essa si reggono egualmeute gli *antipodi*, che son gli abitatori opposti per diametro, o a piè contro piede.

5. L'abbassarsi che fan le montagne, le torri, e le navi all'occhio di chi si allontana, e il loro occultarsi di mano in mano dal piede alla cima; e viceversa l'apparire, e l'alzarsi successivamente dalla cima al piede a chi lor s'avvicina, dipende dalla convessità della superficie terrestre interposta.

6. Il cielo non è propriamente che lo spazio dell'Universo. Ei non ha limiti, ed ogni suo punto può considerarsi per centro. Il nome di *sfera celeste* suppon questo centro esser quel della Terra.

7. *Orizzonte sensibile* di un luogo della Terra si dice quel circolo, con cui la di lei superficie separa all'occhio dell'Osservatore la parte visibile della sfera celeste dall'invisibile.

8. L'*orizzonte razionale* passa pel centro della Terra parallelo al sensibile, dividendo la sfera celeste in due eguali emisferi, un *superiore*, e l'altro *inferiore*. Col semplice nome di *Orizzonte* noi sempre intenderem questo solo.

9. *Asse* d'un circolo di una sfera si dice tal diametro di questa, che sia perpendicolare al piano di quello; i suoi estremi diconsi *poli*. È facile di mostrare per la geometria, che l'asse d'un circolo di una sfera passa necessariamente pel di lui centro.

10. L'asse dell'orizzonte chiamasi *linea verticale*; il *zenit* è il polo superiore, ed il *nadir* l'inferiore.

11. *Asse* di una sfera dicesi quel suo diametro, intorno al quale si suppone rotare, e *poli* i suoi estremi. Tutti i circoli descritti dei differenti punti della di lei superficie hanno l'asse, e i poli comuni colla sfera medesima, e son paralleli tra loro; il massimo si chiama *equatore*.

12. Tutte le stelle compajon girare continuamente, e con moto uniforme da oriente in occidente intorno ad un asse comune in circoli paralleli, che compion nello spazio press' a poco d' un giorno. Il sole, la luna, e tutti i pianeti, e le comete seguono il moto medesimo.

13. Un tale accordo fa a prima vista supporre, che la sfera celeste stellata, qual corpo solido, si ravvolga intorno a detto asse, seco traendo tutti gli altri astri: ma la sana ragione c' insegna a spiegarlo col semplice rotar della Terra in senso contrario, cioè da occidente in oriente intorno all' asse medesimo, e nel medesimo tempo.

14. L' asse, e i poli della sfera celeste, o dell' apparente di lei rotazione, chiamansi *asse*, e *poli del mondo*. L' un polo è detto *boreale*, *settentrionale*, od *artico*; e l' altro *australe*, *meridionale*, od *antartico*: e cogli stessi nomi distinguonsi pure i poli corrispondenti della Terra. Tutta l' Europa guarda il polo boreale.

15. Trovasi questo vicinissimo ad una stella assai lucida, detta *stella polare*, che è l' ultima della coda della così detta *orsa minore*. Questa è una costellazione, o sistema di sette stelle, le quali rappresentano anzi la figura d' un carro, che quella d' un orsa. Non molto lunge vi ha un altro carro più grande, e più distinguibile, detto *orsa maggiore*. Or se per le due ultime ruote posteriori di questo secondo carro si prolunghi coll' occhio una linea dalla parte della convessità del timone, andrà ella a passar vicinissima alla stella polare, press' a poco a tanta distanza dalla seconda ruota, quanta è la distanza di questa stessa seconda ruota dall' estremità del timone. La lucentezza di questa stella sopra tutte le altre circonvicine toglie ogni timore di sbaglio a rinvenirla.

16. *L' equatore terrestre* è nel medesimo piano col *celeste*, e dividono l' uno la sfera terrestre, l' al-

tro la celeste in due eguali emisferi, detti pur *boreale*, ed *australe*, secondo i poli, che guardano.

17. L' equator celeste taglia in ogni luogo della Terra l'orizzonte in due parti eguali, e vi segna sulla circonferenza due punti detti, l' uno *oriente*, *levante*, od *est*; e l' altro *occidente*, *ponente*, od *ovest*.

18. Il *meridiano* di un luogo terrestre è il circolo, che passa pel di lui zenit, e pei poli del mondo. Egli taglia l' orizzonte in due parti eguali, e vi segna sulla circonferenza altri due punti detti, l' uno *nord* verso il polo boreale, e l' altro *sud* verso l' australe

19. Il nord, il sud, l' est, e l' ovest diconsi *punti cardinali*, e dividono l' orizzonte in quattro quadranti: l' est è alla destra di chi guarda il nord, l' ovest a sinistra, e il sud per di dietro.

20. I marinai suddividono ciascuno di questi quattro quadranti in otto altre parti eguali, e distinguono così su tutta la circonferenza dell' orizzonte 32 punti, che chiamano *venti*, o *rombi di vento*. I nomi e le caratteristiche, con cui li distinguono, son come segue.

Venti Cardinali

N	— Nord
E	— Est
S	— Sud
O	— Ovest

Primi intermedj

NE	— Nord-est
SE	— Sud-est
SO	— Sud-ovest
NO	— Nord-ovest

Secondi intermedj

NNE	— Nord-nord-est
ENE	— Est-nord-est
ESE	— Est-Sud-est
SSE	— Sud-sud-est
SSO	— Sud-sud-ovest
OSO	— Ovest-sud-ovest
ONO	— Ovest-nord-ovest
NNO	— Nord-nord-ovest

Terzj intermedj

N ¼ NE	— Nord quarto nord-est
NE ¼ N	— Nord-est quarto nord
NE ¼ E	— Nord-est quarto est
E ¼ NE	— Est quarto nord-est
E ¼ SE	— Est quarto sud-est
SE ¼ E	— Sud-est quarto est
SE ¼ S	— Sud-est quarto sud
S ¼ SE	— Sud quarto sud-est
S ¼ SO	— Sud quarto sud-ovest
SO ¼ S	— Sud-ovest quarto sud
SO ¼ O	— Sud-ovest quarto ovest
O ¼ SO	— Ovest quarto sud-ovest
O ¼ NO	— Ovest quarto nord-ovest
NO ¼ O	— Nord-ovest quarto ovest
NO ¼ N	— Nord-ovest quarto nord
N ¼ NO	— Nord quarto nord-ovest

La loro posizione si riscontrerà dall' annessa figura detta *rosa de' venti*.

21. *Ago magnetico* dicesi una lamina d'acciajo calamitato girevole orizzontalmente sopra una punta verticale. I suoi estremi chiamansi *poli*, uno *boreale*, e l'altro *australe*: il primo si dirige sempre press'a poco al nord, e l' altro al sud.

22. Un pian verticale, che s' intende passare pei poli dell'ago magnetico situato alla sua natural posizione, dicesi *meridiano magnetico*: l'angolo, ch' egli fa col meridiano del luogo, dicesi *declinazione magnetica*.

23. Presentemente in Europa la declinazione magnetica è di circa 19.° all' ovest. Fuori d'Europa andando verso l'ovest, e verso l'est questa declinazione si osserva sempre minore. Nell'America settentrionale si trova una linea diretta press' a poco a sud-est, e che passa pel golfo del Messico, e pel mar del Brasile, in cui la declinazione è nulla. Un'altra linea simile traversa nella medesima direzione l'Asia, e tutto il mare del Sud. Al di là di queste due linee l'ago magnetico declina verso l' est.

24. Nel secolo XVII. la linea senza declinazione traversava l'Europa; e da quest' epoca si è sempre più allontanata avanzando verso l'ovest; lo stesso movimento han avuto tutte le linee di declinazioni simili; di modo che par, ch'esse facciano nel corso di alcuni secoli tutto il giro della Terra.

25. La bussola nautica è una scatola cilindrica d'ottone, sul di cui fondo interno è dissegnata la rosa de' venti, e tutt' intorno i gradi d'un circolo, dal centro del quale s' erge la punta, che porta l'ago magnetico. Un coperchio di vetro la difende dall'aria, e lascia ad un tempo vedere la direzione dell'ago. Se ne servono non solo i marinaj, ma anche gli ingegneri geodeti, a fissare le posizioni dei punti, che aman segnare sulle lor mappe.

26. In virtù della rotazion della Terra il sole compare ogni mattina ad illuminar l'orizzonte dalla parte d'oriente, montare il superiore emisfero, raggiungere il meridiano a mezzodì, e continuando il suo corso discendere dalla parte d' occidente alla sera, e tramontare nell' emisfero inferiore, per attraversarlo durante la notte.

27. Il mezzodì, il levare, e 'l tramontar di quest' astro si conta dal momento, che il suo centro si trova precisamente nel pian del meridiano,

o dell'orizzonte, a levante, ovvero a ponente. Come poi è assai più agevole di osservare l'arrivo di questo centro al meridiano, che all'orizzonte; così gli Astronomi insegnano a contare da quest'istante il principio, ed il finire del giorno, la cui durata è di 24 ore.

28. I meridiani terrestri si contano da occidente in oriente, di mano in mano che per la diurna rotazion della Terra ripassan pel centro del sole. Un tal computo può farsi egualmente e in gradi dell'equatore, e in tempo nella ragion costante di 360° per giorno, o che è lo stesso, di 15° per ora.

29. Due osservatori posson trovare la differenza, o distanza de' lor meridiani dalla differenza de' loro orologi all'istante, in cui possono contemporaneamente osservare uno stesso fenomeno celeste, come sarebbe il principio, od il fine d'un eclisse lunare. Se per esempio l'orologio del primo segni 9 ore, e quel del secondo 10 di mattina, cioè l'uno 3, e l'altro 2 ore prima de' lor mezzodì rispettivi; sarà il primo 15° all'occidente del secondo.

30. La seguente tabella presenta i rapporti delle parti del tempo alle parti corrispondenti dell'equatore, e viceversa le parti dell'equatore alle parti corrispondenti del tempo.

Ore	Gr.	M	G. M	M	G. M
		S	M. S	S	M. S
1	15	1	0.15	31	7.45
2	30	2	0.30	32	8. 0
3	45	3	0.45	33	8.15
4	60	4	1. 0	34	8.30
5	75	5	1.15	35	8.45
6	90	6	1.30	36	9. 0
7	105	7	1.45	37	9.15
8	120	8	2. 0	38	9.30
9	135	9	2.15	39	9.45
10	150	10	2.30	40	10. 0
11	165	11	2.45	41	10.15
12	180	12	3. 0	42	10.30
13	195	13	3.15	43	10.45
14	210	14	3.30	44	11. 0
15	225	15	3.45	45	11.15
16	240	16	4. 0	46	11.30
17	255	17	4.15	47	11.45
18	270	18	4.30	48	12. 0
19	285	19	4.45	49	12.15
20	300	20	5. 0	50	12.30
21	315	21	5.15	51	12.45
22	330	22	5.30	52	13. 0
23	345	23	5.45	53	13.15
24	360	24	6. 0	54	13.30
		25	6.15	55	13.45
		26	6.30	56	14. 0
		27	6.45	57	14.15
		28	7. 0	58	14.30
		29	7.15	59	14.45
		30	7.30	60	15. 0

G	Or. M	G	Or. M	Gr.	Ore	Min.
M	M. S	M	M. S			
1	0. 4	31	2. 4	70	4.	40
2	0. 8	32	2. 8	80	5.	20
3	0.12	33	2.12	90	6.	0
4	0.16	34	2.16	100	6.	40
5	0.20	35	2.20	110	7.	20
6	0.24	36	2.24	120	8.	0
7	0.28	37	2.28	130	8.	40
8	0.32	38	2.32	140	9.	20
9	0.36	39	2.36	150	10.	0
10	0.40	40	2.40	160	10.	40
11	0.44	41	2.44	170	11.	20
12	0.48	42	2.48	180	12.	0
13	0.52	43	2.52	190	12.	40
14	0.56	44	2.56	200	13.	20
15	1. 0	45	3. 0	210	14.	0
16	1. 4	46	3. 4	220	14.	40
17	1. 8	47	3. 8	230	15.	20
18	1.12	48	3.12	240	16.	0
19	1.16	49	3.16	250	16.	40
20	1.20	50	3.20	260	17.	20
21	1.24	51	3.24	270	18.	0
22	1.28	52	3.28	280	18.	40
23	1.32	53	3.32	290	19.	20
24	1.36	54	3.36	300	20.	0
25	1.40	55	3.40	310	20.	40
26	1.44	56	3.44	320	21.	20
27	1.48	57	3.48	330	22.	0
28	1.52	58	3.52	340	22.	40
29	1.56	59	3.56	350	23.	20
30	2. 0	60	4. 0	360	24.	0

31. È arbitrario di cominciar dovunque a contare i meridiani. I Francesi han fissato 20° al meridiano, che passa per la specola principale di Parigi. Quindi il primo meridiano è per essi appena al di là dall' isola del ferro, che è la più occidentale delle Canarie. La più parte d' Europa segue il medesimo computo. La distanza del meridiano d' un luogo da quello, che si è fissato pel primo, chiamasi *longitudine geografica*. La longitudine della specola di Brera a Milano è di 26° 50', quella di S. Petronio a Bologna 29° 1'.

32. La *latitudine geografica* di un dato luogo terrestre è la di lui distanza boreale, od australe dall' equatore computata in gradi del meridiano. Ella è eguale all' altezza del polo, poichè l' una, e l' altra sono supplemento della distanza del zenit dal polo medesimo.

33. Tutte le stelle, che per la lor vicinanza al polo non trammontano mai l' orizzonte di chi le guarda, diconsi *circompolari*. Nel descriver che fanno il lor parallelo diurno, si osservano nelle lunghe notti passare due volte pel meridiano, una superiormente, e l' altra inferiormente al polo. L' altezza dunque di questo è eguale alla semisomma delle due altezze massima, e minima di una stella circompolare. La latitudine, o l' altezza del polo della specola di Brera a Milano è di 45° 28', 10", e di S. Petronio a Bologna di 44° 29' 36".

34. Un circolo massimo della sfera celeste, che passa pel zenit, e pel centro di un astro, si chiama di lui *verticale*. L'arco di questo verticale intercetto tra l'orizzonte, ed il centro dell'astro ne definisce *l' altezza*; e l' angolo, sotto cui taglia il meridiano, si chiama suo *azzimutto*: egli è misurato dall' arco intercetto dell' orizzonte.

35. La *linea meridiana* è l' intersezione del meridiano coll' orizzonte sensibile. Uno stilo verticale posto in faccia al sole progetta sopra un sot-

toposto piano orizzontale un' ombra, la di cui lunghezza è determinata dall' altezza del sole; e l'angolo, che fa colla linea meridiana, è la misura dell' azzimutto.

36. Ad eguali distanze di tempo prima e dopo mezzodì le due altezze, e i due azzimutti del sole sono eguali, e per conseguenza le due ombre dello stilo sono egualmente lunghe, e poste ad angoli eguali colla linea meridiana. Se dunque per l' estremità d' un' ombra antimeridiana si descriva una circonferenza di circolo attorno al piè dello stilo, e segnato sovr' essa il punto estremo dell' ombra, si aspetti finchè dopo mezzodì torni questo a raggiungerla, per segnare la meridiana non si avrà che a dividere in due parti eguali l' arco intercetto, e condurre pel punto di mezzo una retta al piè dello stilo.

37. Per assicurarsi dell'esattezza dell'operazione conviene a varie distanze dal mezzodì, come per esempio alle dieci ore della mattina, poi alle dieci e mezzo, e dopo le undici, descrivere per le estremità dell'ombre altrettante circonferenze concentriche; la linea meridiana dee tagliare egualmente tutti gli archi compresi dall' ombre eguali corrispondenti alla stessa circonferenza. Or ciò non si ottiene precisamente, che verso i solstizj d' estate, e d' inverno, cioè alla fine di Giugno, e di Decembre, siccome s' intenderà dal n.° 66.

38. Come poi le estremità dell' ombre progettate dai corpi sono sempre sfumate, e difficilmente si possono precisare; così convien meglio di opporre al sole in luogo dello stilo una lamina con un foro nel mezzo, per cui passando un raggio solare vada a formare sul pian sottoposto un spettro rotondo, che è l' immagin del Sole. Il centro di questo spettro è assai più distinguibile dell' estremità dell' ombra, di cui tiene le veci.

39. Le meridiane verticali, od inclinate co-

munque non sono che le intersezioni del pian del meridiano colle superficie, su cui sono descritte. Lo stilo, o la lamina progettante l'ombra, o lo spettro del sole si chiama *gnomone* la sua *altezza* si misura dalla distanza perpendicolare della punta dello stilo, o del centro del foro della lamina alla superficie opposta.

40. Due fili, che cadano a piombo sopra una linea meridiana orizzontale ad alcuni piedi di distanza l'uno dall'altro, possono servir di traguardo ad osservare alla notte le stelle al lor passaggio pel meridiano, e notarne il momento. Bisogna illuminarli alcun poco per presentarli distintamente all'occhio.

41. *Moto annuo della terra* dicesi il di lei girar progressivo da occidente in oriente nel corso di un anno intorno al sole, in un piano che taglia l'equatore sotto un angolo di circa 23°, 28', e mantenendo sempre l' asse della sua rotazione parallelo a se stesso.

42. Il circolo massimo, che figura la sczion della terra col suddetto piano, s' intende prolungato fino alla superficie celeste, e chiamasi *eclittica*. Le due intersezioni della di lei circonferenza coll' equatore diconsi *punti equinoziali*: i *punti solstiziali* sono altri due punti dell' eclittica ad angoli retti cogli equinoziali.

43. Il *coluro degli equinozj* è il circolo, che passa pei poli dell' equatore, e pei punti equinoziali; e il *coluro dei solstizj* quello, che passa pei poli dell' equatore, e pei punti solstiziali. L' arco di questo secondo coluro, intercetto tra l' equatore e l' eclittica, misura l' angolo dei 23°, 28' di loro inclinazione, che dicesi *obbliquità dell' eclittica*.

44. I due circoli paralleli della rotazione diurna, che passano pei punti solstiziali, diconsi *tropici*; il boreale *tropico del cancro*, e l'australe *tro-*

pico del capricorno. I due *circoli polari artico*, ed *antartico* sono pur duo paralleli della rotazione diurna: il primo passa pel polo boreale dell'eclittica, e l'altro per l'australe.

45. Tutti questi punti, e circoli debbonsi distinguere tanto sulla superficie terrestre quanto sulla celeste di corrispondenza. Chiamo un punto celeste *di corrispondenza* ad un altro terrestre, quando giacciono entrambi sulla medesima retta condotta al centro della terra.

46. Allorchè la terra durante il suo moto annuo si trova in tal situazione, che la linea dei punti equinoziali si diriga al centro del sole, e il polo boreale del equatore guardi la parte opposta alla direzion di tal moto, si ha l'*equinozio di primavera*. Il circolo, che divide a quest'epoca l'emisfero illuminato dal sole dall'altro oscuro, è perpendicolare all'equatore, divide in due parti eguali tutti i paralleli della rotazione diurna, e rende per conseguenza per tutti i luoghi terrestri il giorno eguale alla notte.

47. Avvanzata la terra un quarto di giro, dirige al centro del sole la linea dei punti solstiziali, inclinando pur verso d'esso il polo boreale: fa allora *il solstizio d'estate*. Il circolo, che divide l'emisfero illuminato dall'altro, è inclinato all'equatore 66° 32', e divide i paralleli della rotazione terrestre per modo, che gli archi diurni dall'equatore verso il polo boreale sono di mano in mano maggiori dei notturni, e verso il polo australe viceversa i notturni di mano in mano maggiori dei diurni.

48. Dopo un altro quarto di giro torna la linea dei punti equinoziali a dirigersi al centro del sole, ma con questa differenza, che il punto equinoziale, che nella prima posizione guardava il sole, qui gli è opposto; e viceversa guarda quì il sole il punto equinoziale, che gli era opposto al-

lo-

lora. Chiamasi questo *equinozio d' autunno*. Il polo boreale volge dalla parte della direzione del moto; e il circolo, che distingue i due emisferi illuminato ed oscuro, dividendo di nuovo in due parti eguali i paralleli della rotazion della terra, dà un' altra volta in tutti i luoghi terrestri il giorno eguale alla notte.

49. Ai tre quarti di giro si ha il *solstizio d'inverno*. La linea dei punti solstiziali è rimessa in direzione col centro del sole, cui però guarda col punto opposto a quello, con cui lo guardava al solstizio d' estate. Il polo boreale volge contrario al medesimo astro, e il circolo, che separa l'emisfero illuminato dall'altro, declinando nuovamente dall' equatore, costituisce alla parte boreale gli archi diurni minori dei notturni, e dalla parte australe i notturni minori dei diurni.

50. Coll' ultimo quarto di giro torna la terra alla prima posizione, e compie così le quattro *stagioni dell' anno*, la *primavera* durante il primo quarto, *l' estate* durante il secondo, l' *autunno* durante il terzo, e l' *inverno* durante l' ultimo. L' intero giro chiamasi *orbita annua* della terra.

51. L' osservatore, che dalla superficie terrestre volge l' occhio al sole, riferisce sempre quest' astro al punto della sera celeste, a cui suppon terminare il raggio visuale. Or durante l' annuo girar della terra gira pur questo raggio pel medesimo verso intorno ad essa, e l' occhio ingannato ne attribuisce il movimento al sole, cui però giudica descrivere da occidente in oriente l' eclittica.

52. Se uno obbiettasse, che il suddetto raggio visuale dell' osservatore è inclinato al pian dell' eclittica; rispondo, che questa inclinazione non arriva a 9'', siccome trovan gli Astronomi, e che per conseguenza non può esser sensibile, giacchè dimostrano i fisici, non esser distinguibile all' oc-

chio un oggetto che si presenti ad esso sotto un angolo minor d'un minuto.

53. Il tempo, che il Sole rimane sull'orizzonte da alcuni è chiamato *giorno artifiziale*, da altri *giorno naturale*; io lo chiamo più volentieri *giorno soleggiato*. La sua durata dipende e dal punto dell' orbita, in cui si trova la terra, e dalla latitudine geografica del luogo terrestre di quel dato orizzonte.

54. Il pian, che separa l'emisfero terrestre illuminato dall' altro oscuro, divide costantemente l'equatore in due parti eguali, e però in tutti i punti di questo circolo il giorno soleggiato è, durante tutto l'anno, eguale alla notte. Gli altri paralleli non son divisi in due parti eguali; nè perciò hanno il giorno soleggiato eguale alla notte, fuorchè negli equinozj, come abbiam detto ai n.i 46, e 48.

55. Dall'equinozio di primavera le parti illuminate dei paralleli boreali ingrandiscono continuamente fino al solstizio d' estate, intanto che quelle dei paralleli australi divengono continuamente minori. Tornano quindi le prime a diminuire, e le seconde a crescere fino al solstizio d'inverno, da dove diminuiscon di nuovo le seconde, e crescon le prime, finchè raggiungano un altra volta il solstizio d' estate.

56. Quanto è maggiore la latitudine geografica, cioè quanto il parallelo di un luogo terrestre è più discosto dall' equatore, tanto il suo giorno soleggiato *massimo* è più lungo. Una zona terrestre compresa tra due paralleli, dall' uno all' altro de' quali la durata del giorno soleggiato massimo diferisce di una data quantità, dicesi *clima*.

57. Si distinguono ordinariamente 24 *climi d' ore*, e 6 *climi di mesi*. I primi si computano di mezz'ora in mezz' ora, ed i secondi di mese in mese, come nelle seguenti tabelle.

Climi d' ore

Numero de' climi	Lat. de' loro term.	Gior. solegg. Mass.
1	8° 25'	12 ore 30'
2	16 25	13 0
3	23 50	13 30
4	30 20	14 0
5	36 28	14 30
6	41 22	15 0
7	45 29	15 30
8	49 1	16 0
9	51 58	16 30
10	54 27	17 0
11	56 37	17 30
12	58 29	18 0
13	59 58	18 30
14	61 18	19 0
15	62 25	19 30
16	63 22	20 0
17	64 6	20 30
18	64 44	21 0
19	65 21	21 30
20	65 47	22 0
21	66 6	22 30
22	66 20	23 0
23	66 28	23 30
24	66 31	24 0

Climi di Mesi

Numero de' climi	Lat. de' loro term.	Gior. solegg. Mass.
1	67° 30'	Mesi 1
2	69 30	2
3	73 20	3
4	78 20	4
5	84 0	5
6	90 0	6

58. I due tropici, e i due circoli polari distinguono la superficie terrestre in cinque zone; la *torrida* fra i due tropici, le due *temperate* dai tropici ai circoli polari, e le due *fredde* ne' segmenti compresi da ciascun circolo polare.

59. L' equatore divide per mezzo la zona torrida. Il sole arriva a questo circolo ai due equinozj. Gli altri paralleli della zona torrida sono pure descritti ciascuno due volte l' anno dal sole; ma la distanza di tempo tra l'una, e l'altra è tanto maggior di 6 mesi, quanto il parallelo è più vicino all' uno, o all' altro tropico, ciascuno de' quali è descritto una volta l' anno precisamente.

60. Nelle due zone temperate il sole è sempre obbliquo, e la sua obbliquità cresce in ciascuna fino al circolo polare, oltre il quale l' obbliquità va sempre più crescendo, finchè ai poli il suo giro è parallelo all' orizzonte.

61. La sfera dicesi *retta*, *obbliqua*, o *parallela*, secondo la posizion perpendicolare, obbliqua, o parallela dell'equatore per rispetto all' orizzonte di un dato luogo.

62. I gradi dell' eclittica si contano dal punto equinoziale di primavera da occidente in oriente, cioè a seconda del moto annuo apparente del Sole: 30° constituiscono uno de' così detti *segni* dell' eclittica, le denominazioni dei quali, le loro caratteristiche, e i tempi, in cui il Sole entra press' a poco in ciascuno, sono come segue.

Nomi de' segni	Caratt.	Tempi in cui entra il sole	Stagioni
Ariete	♈	20 Marzo	
Toro	♉	20 Aprile	Pimavera
Gemelli	♊	21 Maggio	
Cancro	♋	21 Giugno	
Leone	♌	22 Luglio	Estate
Vergine	♍	23 Agosto	
Libra	♎	22 Settembre	
Scorpione	♏	23 Ottobre	Autunno
Sagittario	♐	22 Novembre	
Capricorno	♑	21 Decembre	
Acquario	♒	19 Gennajo	Inverno
Pesci	♓	18 Febbrajo	

63. La *declinazione* di un astro è la di lui distanza boreale, od australe dall' equatore computata sopra un circolo, che passa pei poli del mondo, ed il centro dell' astro, e che però chiamasi *circolo di declinazione*.

64. Quando vediam passare un astro pel meridiano, la sua altezza diminuita della declinazione boreale, od accresciuta dell' australe, eguaglia l' altezza dell' equatore, o che è lo stesso, il complemento dell' altezza del polo. Data dunque l'altezza del polo, e quella di un astro al momento del suo passaggio pel meridiano, se ne trova la declinazione, sottraendo il complemento dell' altezza del polo da quella dell' astro, s' egli è boreale; ovvero, se è australe, sottraendo la di lui altezza dal complemento di quella del polo.

65. Il Sole dall' equinozio di primavera va sempre crescendo in declinazione boreale fino al tropico del cancro nel solstizio d' estate, quindi tor-

na a scemare fino a raggiunger di nuovo l' equatore all' equinozio d' autunno, da dove passa in declinazione australe fino al tropico del capricorno nel solstizio d' estate.

66. La velocità di un tal moto va continuamente diminuendo dall' equatore ai tropici, dove il Sole pare per tre o quattro giorni stazionario. Dunque le ombre del gnomone ad egual distanza di tempo dal mezzodì non sono sensibilmente eguali, che nei giorni solstiziali.

67. Gli angoli, che fanno ai poli dell'equatore i circoli di declinazione, si misurano da occidente in oriente in gradi dell'equatore stesso a ragione di 15° per ora, incominciando dal punto equinoziale di primavera, e diconsi *angoli orarj*, o *di ascensione retta*.

68. La *latitudine* di un astro è la di lui distanza boreale, od australe dall'eclittica computata sopra un circolo, che passa pei di lei poli, e che però chiamasi *circolo di latitudine*.

69. Gli angoli, che fanno ai poli dell' eclittica i circoli di latitudine, si misurano da occidente in oriente in gradi dell'eclittica stessa cominciando dal punto equinoziale di primavera, e diconsi *angoli o gradi di longitudine*.

70. Dall'equinozio di primavera a quello d'autunno si contano circa 8 giorni di più che dall'equinozio d'autunno a quello di primavera. Il moto annuo angolar della terra non è dunque uniforme.

71. La velocità massima si trova dopo il solstizio d'inverno, verso i primi di Gennajo, e la minima dopo il solstizio d' estate, verso i primi di Luglio. La prima è di 1°,01943, e l' altra di 0°,95319 per giorno; la loro semisomma di 0°,98631 constituisce la velocità media, e si trova dopo i due equinozj, verso i primi di Aprile, e di Ottobre.

72. La grandezza d'un angolo è in ragion diretta della lunghezza lineare dell' arco del circolo descritto dal di lui vertice, e compreso fra i lati, e reciproca del raggio. Di fatti la lunghezza lineare dell'arco cresce o scema proporzionalmente al raggio, e al numero dei gradi, che misurano l'angolo. Se però la lunghezza lineare dell' arco si supponga costante, la grandezza dell' angolo sarà reciproca al raggio.

73. La *grandezza* o *diametro apparente* di un oggetto non è altro che l'angolo, sotto cui si presenta all' occhio. Finchè quest' angolo è così piccolo, che all'arco sotteso si possa senza error sensibile sostituire il diametro reale dell' oggetto, si potrà pure senza error sensibile asserire, ch' egli è reciproco al raggio, cioè alla distanza del medesimo oggetto dall'occhio.

74. Il diametro apparente del sole si osserva crescere, e diminuire, col crescere, e diminuire l'annua velocità angolar della terra. Dunque la terra durante un tal moto varia continuamente distanza dal Sole, appressandosi al crescere, ed allontanandosi al diminuire di velocità.

75. Confrontando i successivi diametri apparenti del sole colle corrispondenti velocità angolari del moto annuo, queste si trovan procedere come i quadrati di quelli; e per conseguenza come reciprocamente i quadrati delle distanze. Il diametro massimo è di 32' 35", il minimo di 31, 31', e il medio di 32' 8".

76. Preso un arco dell' orbita abbastanza piccolo da potersi avere in conto di linea retta senza error valutabile, e condotti da' suoi estremi due raggi di distanza al centro del Sole, si avrà un settore dell'orbita il cui angolo al vertice sarà pur piccolissimo. Divisa in due parti eguali la base di questo settore, si guidi dal punto di mezzo un terzo raggio al vertice, da dove col raggio

medesimo si descriva un arco di circolo fra i due primi per avere un nuovo settor circolare, il quale comprenderà un'area eguale al primo. Ora quest' area è proporzionale al raggio medio moltiplicato per la lunghezza lineare dell' arco, cioè pel prodotto del medesimo raggio nell'angolo (*n.*° 72). Dunque l'area del supposto settore dell' orbita è proporzionale al quadrato del raggio moltiplicato per l'angolo.

77. La velocità si misura dalla ragion diretta dello spazio descritto, e dall inversa del tempo impiegato a descriverlo. Lo spazio per conseguenza è in ragion composta della velocità e del tempo.

78. L'angolo al vertice del supposto settore dell' orbita terrestre è dunque proporzionale alla velocità del raggio, dal quale si suppone descritto, e che chiamasi *raggio vettore*, moltiplicata pel tempo. Dunque l' area del settore è proporzionale al quadrato del raggio moltiplicato per la velocità, e pel tempo, o (per essere la velocità reciproca al quadrato di esso raggio) (*n.*° 75) proporzionale semplicemente al tempo.

79. In eguali elementi del tempo le piccole aree sono eguali, e vanno per conseguenza moltiplicandosi, o crescendo con esso. Dunque in generale, qualunque siano le grandezze delle aree descritte dal raggio vettor della Terra intorno al centro del Sole, sono sempre proporzionali alla tempo.

80. Esaminando l'andamento delle distanze, o lunghezze dei raggi vettori, si trovano appartenere ad un' ellisse, la di cui *eccentricità*, cioè la distanza dal foco al centro, è di 168 dieci millesimi della distanza media, o semiasse maggiore.

81. Il luogo apparente del Sole alla sua distanza massima dalla Terra si chiama *apogeo*, ed alla minima *perigeo*. L' *anomalia vera* è la sua distanza angolare apparente dall'apogeo, e l'*anomalia media* è la distanza apparente, che avrebbe, se il di lui moto annuo apparente fosse uniforme. La differenza

tra l'anomalia vera, e la media, dicesi *equazione dell'orbita*, ovvero *del centro*.

2. Il ritorno del Sole al medesimo apogeo constituisce l'*anno anomalistico*, ed è di 365 giorni 6 ore 15' 23" circa. Il ritorno del Sole al medesimo circolo di latitudine con una stella fissa costituisce l'*anno Sidereo*, che è di 365 giorni 6 ore 9' 11" l'*anno tropico* è il ritorno del sole al medesimo punto equinoziale di primavera, ed è di giorni 365 ore 5 48' 48".

83. Ha dunque l'apogeo un moto annuo diretto, cioè da occidente in oriente, di 65",5 di grado, e i punti equinoziali un moto annuo retrogrado, cioè da oriente in occidente di 50". Il difetto di 20' 23" della durata dell'anno tropico dal Sidereo chiamasi *precessione degli equinozj*.

84. L'*anno civile* è regolato sul ritorno delle medesime Stagioni, e per conseguenza sull'anno tropico. Egli si conta tre volte di seguito di 365 giorni, e la quarta di 366. I primi tre anni si chiamano *comuni*, il quarto *bisestile*: il suo giorno di più si aggiunge al mese di Febbrajo, il quale negli anni comuni è di 28 giorni, e nel bisestile di 29.

85. Questo sistema fu stabilito da Giulio Cesare, e chiamasi perciò sistema del *Calendario Giuliano*. In essa però quattr'anni contano 44' 42" più del dovuto, e cent'anni 18 ore 37' 30"

86. Lasciando correr comune l'anno centesimo si toglie questo eccesso, ma si ha un difetto di 5 ore 22' 30", che poi si compensa assai prossimamente facendo bisestile l'anno quattrocentesimo. Tale è il sistema del *Calendario Gregoriano*, così detto, perchè fu ordinato sotto il papa Gregorio XIII.

87. L'anno 1800 fu bisestile, i tre seguenti comuni; il 1804 di nuovo bisestile, e i tre seguenti comuni; il corrente 1808 è bisestile, li 1900, 2000, 2100 saranno comuni, ed il 2200 bisestile.

88. I Persiani addottarono nell' undecimo secolo un sistema assai più semplice. Fan essi correre sette periodi di quattr' anni, ed un ottavo di cinque; l' ultimo anno di ciascun periodo è di 366 giorni, e tutti gli altri di 365. Di 33 anni 8 sono dunque bisestili, e 25 comuni. Ciò suppone la lunghezza dell'anno di 365 giorni 5 ore 49′ 20″, il di cui eccesso sul vero anno tropico non può allontanare d'un giorno il principio dell'anno, che nel corso di circa 43 secoli.

89. Il ritorno d'una stella fissa allo stesso meridiano determina il così detto *giorno sidereo*. La sua durata è di 23 ore 56′ 4″. Le stelle dunque avanzano il Sole verso occidente 59′ 8″, ogni giorno. dicesi questa *accelerazione delle stelle fisse*, e da essa dipende il cambiare che fa di stagione in stagione l'aspetto del cielo alla notte.

90. Il *giorno solare*, detto *anche astronomico*, non è precisamente di 24 ore che sol quattro volte all' anno, cioè intorno li 10 Febbrajo, li 15 Marzo, li 26 Luglio, e li 2 Novembre: in tutto il restante dell' anno ora cresce, ora diminuisce. Il massimo è di circa 24 ore 0′ 25″ verso li 23 Dicembre, ed il minimo di circa 23 ore 59′ 35′ verso li 15 Novembre. Li quattro giorni di 24 ore diconsi *medj*.

91. Un oriuolo esattissimo regolato in un d'essi giorni a mezzodì indica successivamente il *tempo medio*. Un quadrante solare indica il tempo vero. La differenza tra il tempo vero, ed il medio si chiama *equazione del tempo*.

92. La seguente tavola presenta in minuti per tutti i giorni dell' anno l' equazione del tempo, cioè quanto si dee aggiungere o detrarre al tempo vero indicato dal quadrante solare per avere il medio indicato dall'oriuolo. Il segno + indica addizione del numero affisso, e di tutti i seguenti, e il segno — sottrazione.

Gior.	Gen.	Feb.	Mar	Apr.	Mag	Giu	Lug.	Ag.	Set.	Ott.	Nov.	Dec.
1	+4	+14	+13	+4	−3	−3	+3	+6	0	−10	−16	−10
2	5	14	12	4	4	2	4	6	−1	11	16	10
3	5	14	12	3	4	2	4	6	1	11	16	10
4	6	14	12	3	4	2	4	6	1	11	16	9
5	6	15	12	3	4	2	4	6	2	12	16	9
6	7	15	11	2	4	2	4	5	2	12	16	8
7	7	15	11	2	4	2	4	5	2	12	16	8
8	7	15	11	2	4	1	5	5	3	13	16	8
9	8	15	11	1	4	1	5	5	3	13	16	7
10	8	15	10	1	4	1	5	5	3	13	16	7
11	9	15	10	1	4	1	5	5	4	13	16	6
12	9	15	10	1	4	1	5	5	4	14	16	6
13	9	15	10	0	4	0	5	4	4	14	15	5
14	10	15	9	0	4	0	5	4	5	14	15	5
15	10	15	9	0	4	0	5	4	5	14	15	4
16	10	14	9	0	4	0	6	4	5	14	15	4
17	11	14	8	−1	4	0	6	4	6	15	15	3
18	11	14	8	1	4	+1	6	3	6	15	14	3
19	11	14	8	1	4	1	6	3	6	15	14	2
20	12	14	8	1	4	1	6	3	7	15	14	2
21	12	14	7	1	4	1	6	3	7	15	14	1
22	12	14	7	2	4	[illegible]	6	3	7	15	13	1
23	12	14	7	2	4	2	6	2	8	16	13	0
24	13	14	6	2	4	2	6	2	8	16	13	0
25	13	13	6	2	3	2	6	2	8	16	13	+1
26	13	13	6	2	3	2	6	1	9	16	12	1
27	13	13	5	3	3	3	6	1	9	16	12	2
28	14	13	5	3	3	3	6	1	9	16	12	2
29	14		5	3	3	3	6	1	10	16	11	3
30	14		4	3	3	3	6	0	10	16	11	3
31	14		4		3		6	0		16		4

93. Nelle effemeridi, che soglion gli astronomi pubblicare anticipatamente ogni anno, son registrate di giorno in giorno a mezzodì le equazioni del tempo in minuti secondi. Un viaggiatore, che osserva il mezzodì vero del Sole al luogo, in cui si trova, dee ridurlo al mezzodì medio per mezzo

dell'equazione del tempo marcata sotto quel giorno, per poterlo confrontare col tempo segnato dal suo orologio a secondi, e regolato al mezzodì medio del luogo, d'ond'è partito. La differenza di questi due mezzodì medj dà la longitudine del luogo (*n.*° 29).

94. L'ineguaglianza de' giorni solari ha due cause: l'ineguaglianza del moto annuo, e l'obbliquità dell'eclittica. Rispetto alla prima, quanto è maggiore l'arco dell'eclittica, di cui il Sole si è ritirato ad oriente, tanto quest' astro vien tratto dall'apparente rotazione della Terra più tardi al meridiano. Quindi al solstizio d'estate, in cui la velocità annua è minore, il giorno solare s'accosta di più al sidereo, che verso il solstizio d'inverno dove ella è maggiore.

95. Rispetto alla seconda causa, si concepiscano per le estremità dell'arco dell'eclittica descritto dal Sole in un giorno due circoli di declinazione: l'arco dell'equatore, che essi intercetteranno, definirà il moto giornaliero del Sole rapportato all'equatore, e per conseguenza l'eccesso del giorno solare sopra il sidereo. Ora è facile di dimostrare colla Trigonometria, che negli equinozj l'arco dell'equatore è minore dell'arco corrispondente dell'eclittica nella ragione del coseno dell'obbliquità dell'eclittica al raggio; e nei solstizj maggiore nella ragione del raggio al coseno dell'obbliquità medesima.

96. La durata del giorno illuminato viene accresciuta dal *crepuscolo*. Questa è quella luce bianca, che noi vediamo nel cielo all'oriente prima del nascere, e all'occidente dopo il tramontare del sole. Il suo principiare la mattina, ed il suo terminare la sera si determina al momento, che il Sole trovandosi 18° sotto l'orizzonte cominciano le stelle nel primo caso a sparirci, e nel secondo a ripararci all'occhio nudo. I raggi del Sole a quell' al-

tezza raggiungono l' atmosfera terrestre, vi si spargono, e riflettono fino al nostr' occhio. Il crepuscolo dalla mattina chiamasi anche *alba* od *aurora*.

97. Ad ascendere, o discendere i suddetti 18°, il Sole impiega più o men tempo, secondo il maggiore o minor numero de' gradi del parallelo diurno, che dee scorrere. Questo numero dipende e dall' altezza del polo, e dalla declinazione del Sole.

98. Se dal primo punto dell' atmosfera illuminata dall' alba all' oriente dall' orizzonte sensibile, o dall' ultimo illuminato dal crepuscolo vespertino all' occidente, s' intendan guidate due rette, una all' occhio dell' osservatore, e l' altra al Sole, saran esse tangenti la superficie terrestre, e v' intercetteranno un arco di 18°. Una terza retta, che divida in due parti eguali quest' angolo passerà pel centro della Terra. Or questa retta si può determinar facilmente per la Trigonometria. Il di lei eccesso sul raggio terrestre è di circa 41 miglia geografiche, e definisce l' altezza dell' atmosfera capace a riflettere i raggi della luce, e formare il crepuscolo.

99. Ma i raggi della luce passando per l' atmosfera terrestre rifrangonsi, e piegano sempre più verso l' occhio dell' Osservatore, il quale riferendo gli oggetti alla direzione dell' urto, che ne riceve, giudica l' altezza degli astri maggiore del vero. La differenza tra l' altezza vera, e l' apparente d' un astro si chiama la di lui *refrazione*.

100. Dessa varia al variar delle altezze, come nell' apposta tabella.

Altezze osservate	Refrazioni
0	32' 30"
1	27 24
2	20 30
3	15 19
4	11 48
5	9 47
6	8 48
7	7 42
8	6 49
9	6 7
10	5 32
11	5 3
12	4 38
13	4 18
14	4 0
15	3 42
16	3 28
17	3 18
18	3 10
19	3 2
20	2 53
25	2 20
30	1 53
35	1 33
40	1 18
50	0 55
60	0 38
70	0 24
80	0 12
90	0 0

101. Ma queste refrazioni non son che le medie: esse variano in più ed in meno, secondo che la bassa atmosfera si carica più o men di vapori, od è meno o più rarefatta dal calore.

102. Conosciuta la velocità del corso diurno apparente di un astro, e la sua direzione, si può sempre determinarne col calcolo per un dato istante l' altezza dall' orizzonte razionale. L' eccesso di quest' altezza sopra quella, che per mezzo di esatti istromenti si trova dall' orizzonte sensibile, si chiama *parallasse diurna* dell' astro.

103. Intanto che la refrazione innalza gli astri, la parallasse si abbassa, l' una e l' altra è nulla al zenit, e va continuamente crescendo fino all' orizzonte.

104. La parallasse di un astro è sempre eguale all' angolo, sotto cui un occhio posto al di lui centro vedrebbe il semidiametro terrestre condotto al luogo del vero osservatore. I due raggi visuali, e questo semidiametro constituiscono un triangolo, che si può chiamar *parallatico*. Se l' astro è all' orizzonte questo triangolo è rettangolo, e allora dato il semidiametro terrestre, e la parallasse, si possono determinare gli altri due lati, che son le distanze dell' astro medesimo, una dal centro della Terra e l' altra dal luogo dell' osservatore.

105. Conosciuta la distanza dell' astro dal centro della Terra per mezzo della di lui parallasse

orizzontale, e facile di conoscere tutte le altre di lui parallassi a differenti altezze; giacchè nel triangolo parallatico son noti allora due lati ed un angolo, che è il supplemento all'altezza misurata collo stromento.

106. L'angolo, sotto cui un occhio nel centro di un astro vedrebbe il diametro dell' orbita terrestre condotto al centro della Terra, dicesi parallasse annua dell'astro. La parallasse annua delle stelle è nulla affatto; si possono per conseguenza supporre ad una distanza infinita.

107. Il semidiametro verticale di un astro, che ha il centro all' orizzonte sensibile, e i due raggi condottivi alle estremità dall' occhio dell'osservator terrestre, constistuiscono un triangolo, il quale ha per base comune col triangolo parallatico la distanza del centro dell'astro dall'occhio dell' osservatore. Dal confronto di questi due triangoli è facile di oalcolare il semidiametro suddetto.

108. Il nome assoluto di *parallasse* non indica che la diurna. La parallasse del sole è troppo picciola per poterla determinare nella maniera sovrindicata (*n.*° 102). Gli astronomi trovarono prima con varj metodi la distanza media del sole di 23405 semidiametri terrestri, poi ne colcolaron da essa la parallasse di 8′, 8″. Il semidiametro del Sole è quasi di 107 semidiametri della Terra.

109. Le macchie nere, che si osservano sulla superficie del Sole, pajon masse ondeggianti. La loro forma è irregolare, il loro numero variabile, e la loro posizione incostante. Frammezzo però le lor variazioni si è potuto col loro soccorso conoscere in quell'astro un moto di rotazione, e determinarne il periodo di circa giorni 25 ½ da occidente in oriente attorno ad un asse inclinato press' a poco 82° 42′ all' eclittica.

110. La Luna accompagna continuamente la Terra, girandole intorno da occidente in oriente

in un'elisse; di cui il centro della Terra occupa un foco. La velocità ad ogni punto di quest'orbita è reciproca al quadrato della distanza; e le aree descritte dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi. Tutto ciò si dimostra nella stessa maniera, che abbiam visto dell'orbita annua terrestre.

111. Il diametro apparente medio della Luna è di 31' 26", e allora la di lei parallasse orizzontale è di 57' 39" quando dunque la Luna ci compar sotto un angolo di 31' 26", la Terra sarebbe vista dal centro della Luna sotto quello di 115 118"; e per conseguenza di diametri apparenti di questi due globi son nel rapporto di 3143 a 11530, e press'a poco di 3 ad 11.

112. La distanza media della Luna al centro della Terra è di 59, 642 semidiametri terrestri; l'eccentricità di 55 millesimi della distanza media; e la massima equazione del centro cioè la massima differenza tra l'anomalia vera e la media di 6° 18' 31".

113. L'orbita lunare taglia l'eclittica in due punti, che chiamansi *nodi*, e segnatamente *nodo ascendente* quello, per cui la Luna monta verso il polo boreale dell'eclittica, e *nodo discendente* l'altro, per cui discende verso il polo australe. L'angolo d'inclinazione dell'orbita lunare all'eclittica varia in più, ed in meno di 8' 24" sopra 5° 8' 49".

114. La rivoluzione siderea della Luna, cioè il suo ritorno al medesimo circolo di latitudine con una stella si compie in 27 giorni 7 ore 43' 12"; e la tropica, cioè il suo ritorno al medesimo coluro degli equinozj in 27 ore 7 giorni 43' 5". La differenza di 7" dipende dalla precessione degli equinozj, ossia dal moto retrogrado dei punti equinoziali dell'orbita terrestre.

115. La rivoluzione anomalistica, cioè il ritorno della Luna all'apogeo è di 27 giorni 13 ore 18' 14". Il suo eccesso di 5 ore 35' 22" sopra la side-

derea, dimostra, che la linea degli *absidi*, cioè che unisce l'apogeo ed il perigeo, si ravvolge anch' essa da occidente in oriente compiendo una rivoluzione siderea in 3232 giorni 11 ore 14' 31", cioè quasi in 9 anni.

116. Il ritorno della Luna al medesimo nodo è di 27 giorni 5 ore 5' 49". Hanno dunque i nodi della Luna un moto retrogrado, e la loro rivoluzione siderea è di 6793 giorni 52' 3", cioè di 19 anni manco 4 mesi e $\frac{1}{2}$.

117. La Luna dicesi in *congiunzione*, quando si trova fra il Sole, e la Terra, ed in *opposizione*, quando è posta al di là della Terra per rispetto al Sole nel medesimo circolo di latitudine. La congiunzione chiamasi anche *Luna nuova*, e l' opposizione *Luna piena*; ed entrambe con un solo vocabolo *Sizigie*. Il *primo quarto*, o la *prima quadratura* della Luna è a 90° dal Sole, e l'*ultimo quarto*, o la *seconda quadratura* a 270°, computando da occidente in oriente.

118. Il ritorno della Luna nuova definisce una *lunazione*, che dicesi anche *rivoluzione sinodica*, o *mese sinodico*; egli è di 29 giorni 12 ore 44' 3". Il suo eccesso sulla rivoluzione siderea dipende dal moto annuo della Terra. Descrivendo questa da occidente in oriente con moto medio 59' 8" per giorno, in tanto che la Luna percorre 13° 10' 35", il moto sinodico non riesce che di 12° 11' 27".

119. Il mese sinodico stà all' anno tropico press' a poco come 19 a 235. Dunque ogni 19 anni si avranno 235 lunazioni. Questo periodo dicesi *ciclo lunare*. Metone lo insegnò agli Ateniesi, i quali ne esponevano ciascun anno al pubblico in lettere d'oro il numero corrente, che però ha preso il nome di *numero d'oro*. Nell' anno, in cui fa la Luna nuova il primo di Gennajo, il numero d' oro è 1, nel sussegnente è 2, nel terzo 3, e così successivamente.

120. Il numero d'oro del primo anno dell' era

volgare era 2. Dunque aggiungendo 1 all' anno corrente, e dividendo per 19, il residuo dà il numero d'oro.

121. *L'anno lunare* è il corso di dodici lunazioni complete, e però 10 giorni 21 ore 0' 13" più breve dell'anno tropico. *L'epatta* di un dato anno è l'età, che ha la Luna al di lui principiare. L'epatta dell'anno seguente contiene 10 giorni 21 ore 0' 13" di più. Se però la somma è maggiore di una lunazione completa, l' epatta non conta che l'eccesso. Si vede quindi, come dall'epatta di un dato anno si debba calcolar quella di un altro qualunque anteriore, o posteriore.

122. Gli almanacchi contan le epatte da 11 in 11 giorni; e per diminuirne l' eccesso al possibile pongon le lunazioni di 30 giorni. Diminuite di un' unità il numero d'oro di un dato anno; molplicate il resto per 11, e sottratto quante volte potete dal prodotto il 30, il residuo vi darà l'epatta da segnare nell'almanacco di quell' anno. Col nome di *epatta* s' intende comunemente questa; l'altra più esatta chiamasi *epatta astronomica*.

123. Dal tempo trascorso dal principiare dell' anno fino ad un istante proposto sottraete prima l'epatta astronomica, indi quante volte potete il periodo di un' intera lunazione; il residuo sarà l'età media della Luna a quell' istante.

124. Aggiugnete insieme l' epatta comune, il numero de' mesi computato da Marzo inclusivamente fino al proposto, e quello dei giorni di esso mese pure inclusivamente fino al proposto. Se la somma sarà inferiore a 30, sarà dessa la prossima età della Luna; se poi sarà superiore, la prossima età della Luna sarà l'eccesso sopra 30, se il mese ha 31 giorni, e sopra 29, se non ne ha che 30. Pei mesi di Gennajo, e Febbrajo non si aggiungono insieme che l' epatta, e i giorni del mese. Ma di

questo metodo non si dee far caso che, dentro uno od anche due giorni.

125. Noi non vediamo la Luna, se non in quanto il di lei emisfero illuminato dal Sole si presenta al nostr' occhio projettato sul circolo massimo perpendicolare al raggio visuale. Nella congiunzione l'emisfero illuminato è al di là di questo circolo, e la Luna è a noi invisibile. Passando poi ella alcuni gradi all'oriente, l'emisfero illuminato comincia a montare dalla parte occidentale al di quà verso noi, e mostrarsi projettato in un *crescente* chiuso da un semicircolo al bordo della Luna, e dalla parte del centro da una semielisse, la quale, innalzandosi l'emisfero illuminato, va di giorno in giorno diventando più stretta, finchè vicina al primo quarto si confonde col diametro del circolo perpendicolare al raggio visuale, e mostra la Luna *dicotoma*, cioè divisa per mezzo. Passa quindi, tuttavia avvanzandosi l'emisfero illuminato, a sempre più incurvarsi dalla parte opposta fino a combaciare il bordo occidentale, e far luna piena. Dopo ciò l'emisfero illuminato, continuando il suo giro, abbandona il primo bordo della Luna, e da quivi comincia a mostrarsi terminato pure in una semielisse che di mano in mano diminuisce in larghezza, diventa dopo l'ultimo quarto una linea retta, e rende la Luna un' altra volta dicotoma, e successivamente s' incurva dalla parte opposta, per raggiungere l'altro bordo alla Luna nuova.

126. Intendansi uniti a triangolo il centro del Sole, quel della Luna dicotoma, e l'occhio dell'osservatore. Il lato, che congiunge quest' occhio col centro della Luna, può determinarsi dalla parallasse (*n.*° 104); l'angolo all'occhio si può misurare; e l'angolo al centro della Luna è retto. Dunque potrà colla Trigonometria trovarsi l'ipotenusa, che è la distanza del Sole dall' occhio. La difficoltà di di ben precisare il momento della Luna dicotoma

rende questo metodo erroneo: ma dobbiamo però ad esso le prime nozioni che si ebbero della gran distanza del Sole dalla Terra.

127. Il globo terrestre progetta dietro se per rispetto al Sole un cono d'ombra, la di cui lunghezza, calcolata dal rapporto dei diametri del Sole, e della Terra, che è di circa 111 ad 1, e dalla distanza dei loro centri, che è di circa 11702 diametri terrestri, si trova di circa 106 di questi stessi diametri terrestri, e però maggiore di tre volte della distanza della Luna; la quale per conseguenza può nel suo corso attraversarla.

128. La larghezza poi della medesima ombra al luogo, in cui può essere attraversata dalla Luna, è di circa $\frac{76}{106}$ del diametro terrestre, vale a dir più del doppio diametro lunare (*n.*° 111). Può dunque la Luna non solo attraversar l'ombra terrestre, ma restarvi anche per qualche tempo immersa del tutto.

129. Un eclisse di Luna non è altro che la di lei immersione totale, o parziale nell'ombra terrestre. Ei dee accadere ogni volta che quest'astro si trova in opposizione in uno de' nodi della sua orbita, o in quelle vicinanze. Se il centro della Luna raggiunge il nodo precisamente sull'asse del cono ombroso, l'eclisse si chiama *centrale*. Negli altri casi la quantità dell'eclisse dipende dalla maggiore, o minor vicinanza del nodo al luogo dell'opposizione.

130. Quanto la Luna è più piccola del Sole, altrettanto questo è da noi più lontano in confronto di quella: di modo che i loro diametri apparenti, al nostr'occhio differiscon pochissimo, e si sorpassano anzi scambievolmente per le loro variazioni (*n.*° 74, 111). Può dunque la Luna coprirci alla vista, ora in tutto, ed ora in parte, il disco solare, cioè produrci un *eclisse* di Sole totale, o parziale.

131. Ciò avviene allorchè la Luna entra in congiunzione al raggiungere un nodo della sua orbita. Se al momento della congiunzione il centro della Luna si trova precisamente su questo nodo, desso, e i centri del Sole, e della Terra sono nella medesima linea retta; e l' osservatore, che si trova in questa linea, vede un eclisse *centrale*. Se allora il diametro apparente della Luna è minore di quello del Sole, questo deborda tutt'intorno in forma d'un anello luminoso, e l'eclisse si chiama *anulare*.

132. La quantità di un eclisse solare dipende adunque dalla maggiore o minor vicinanza della Luna da un nodo della sua orbita al momento della congiunzione, e dal rapporto delle distanze del Sole, e della Luna dal centro della Terra, che ne fa variare i diametri apparenti. L'elevazione della Luna sull' orizzonte, diminuendone la distanza dall' osservatore, ne accresce il diametro apparente, e variandone la parallasse, nè fa pur variare l'apparente sua posizione col Sole: così un osservatore può vedere un eclisse di Sole, che non è visto da un altro da lui distante. E in ciò gli eclissi di Sole differiscon da quelli di Luna, che son per tutti i luoghi della Terra gli stessi.

133. Lo sparire poco men che improvviso della luce in un eclisse totale di Sole nè accresce le tenebre, il ciel si presenta come nelle notti più oscure, le stelle compajono con tutto il loro splendore, e gli animali si riempiono di spavento.

134. Se la Luna fosse circondata da un atmosfera sensibile, il Sole e le stelle, che vanno a nascondersi dietro il suo disco, piegherebbero, siccome accade per l'atmosfera terrestre (*n.*° 99), i raggi intorno ad esso verso il centro, e noi vedremmo gli eclissi incominciare più tardi, e terminare più presto di quanto importa il lor transito da un di lei bordo all' altro.

135. La corona di pallida luce, che circonda la Luna durante un eclisse totale di Sole, è troppo sensibile, ed estesa per potersi attribuire all' atmosfera lunare; e par probabile, ch'ella sia l'atmosfera stessa del Sole.

136. La debole rossigna luce, che si osserva ordinariamente negli eclissi totali di Luna sul di lei disco, le viene dai raggi riflessi dall' atmosfera terrestre. La pallida cenerina luce, che vediamo sulla porzione non illuminata del disco lunare nelle vicinanze de' novilunj, dipende dai riflessi della Terra. La porzione illuminata del medesimo disco compare più rilevata, perchè l'abbondante sua luce si sparpaglia sulla retina, e vi fa un' impressione più viva, e più espansa.

137. La luce del Sole è più debole ai bordi, che al centro, a cagione della gran dispersione, che soffre nell' atmosfera solare, cui è obbligata a traversare obbliquamente per giungere a noi. Al contrario la luce della Luna è più viva ai bordi, perchè da quindi, senza soffrir dispersione sensibile dall' atmosfera lunare, ci viene sotto un angolo minore, e per conseguenza più fitta.

138. Sulla parte non illuminata del disco lunare, e principalmente tra la congiunzione, e la quadratura, si scorgono col cannocchiale a qualche distanza dalla concavità del crescente sparsi dei pezzetti di Luna non men rilucenti del crescente medesimo. Son dessi montagne, che sporgono altissime ad essere illuminate anticipatamente dal Sole. Le profondità si offrono anche alla nuda vista in forma di macchie oscure.

139. La posizione costante di queste montagne, e di queste profondità per rispetto al nostr' occhio dimostra, che la Luna volge sempre in ver noi lo stesso emisfero; che però ella ruota intorno se stessa nel tempo medesimo, che gira nella sua orbita intorno alla Terra. Così voi girando intor-

no ad una tavola colla faccia sempre rivolta a guardare un medesimo oggetto collocato nel mezzo, vi ravvolgete sì fattamente intorno a voi stesso, che dove ad un punto della tavola avevate una parete alle spalle, arrivato al punto opposto ve la trovate in faccia.

140. La *librazione*, per la quale vediamo le macchie della Luna ora allontanarsi, ora avvicinarsi alcun poco ai bordi dipende 1.° dalle ineguaglianze del moto di quest' astro nella sua orbita, e per conseguenza dal di lui disaccordo colla rotazione. 2.° Dalla parallasse, per cui al variar della Luna in altezza dall' orizzonte, il raggio visuale condotto al di lei centro varia d' inclinazione col pian della base dell' emisfero visibile. 3.° Dall'essere l' asse di rotazione alcun poco obbliquo al piano dell' orbita, e dal presentarsi per conseguenza un de' poli inclinato or verso il centro della Terra, ora da un canto, ora dall' altro, ed ora in senso opposto.

141. Oltre la Terra girano intorno al Sole a riceverne la luce, e gli influssi molti altri globi opachi, quali da occidente in oriente secondo l' ordine de' segni, in elissi di poca eccentricità, e quali per altri versi in elissi estremamente allungate. I primi si chiaman *pianeti*, e i secondi *comete*.

142. L' *afelio* di un pianeta, o di una cometa è il punto della sua massima distanza dal Sole, e il *perielio* quello della sua distanza minima. Il *nodo ascendente* è il punto, in cui attraversa il pian dell' eclittica per montare alla parte boreale, e il *nodo discendente* il punto, per cui vi discende alla parte australe.

143. Nella segnente tabella espongo i nomi dei pianeti finor conosciuti; le loro distanze medie dal Sole, dette *geocentriche*, presa per unità quella della Terra; le eccentricità delle loro orbite,

ciascuna in parti della corrispettiva distanza media; le inclinazioni delle orbite all' eclittica, le durate delle loro rivoluzioni sideree da occidente in oriente intorno al Sole; le durate delle loro rotazioni, pure da occidente in oriente, ciascuno intorno al proprio asse; e in fine i loro diametri medj in parti del diamentro medio terrestre.

Pianeti	Distanze medie	Eccentricità	Incl. dell' orb.	Rivol. sideree	Rotazioni	Diametri medj
Mercurio	0,3871	0,2055	7° 0' 0"	gior. 87.9693	Inosservata	0, 407
Venere	0,7233	0,0069	3 23 35	224.7008	gior. 0,972	0, 959
la Terra	1,0000	0,0168	0 0 0	365,2564	0,997	1, 000
Marte	1,5237	0,0931	1 51 0	686.9796	0.027	0, 663
Vesta	2,30 cir.	0,09 cir.	7 14 cir.	1278 circa	Inosservata	Piccolissimi Se-
Giunone	2,66 cir	0,25 cir.	13 4 cir.	1589 circa	Inosservata	condo Olbers
Cerere	2,77 cir.	0,08 cir.	10 5 cir.	1681 circa	Inosservata	pezzi di un
Pallade	2,77 cir.	0,25 cir.	34 38 cir.	1683 circa	Inosservata	solo pianeta.
Giove	5,2027	0,0481	1 19 2	4332,6022	0,414	119, 262
Saturno	9,5407	0,0562	2 29 55	10759,0772	0,428	9, 983
Urano	19,1836	0,0467	0 46 26	30689,0000	Inosservata	4, 333

144. L' ultimo di questi pianeti fu scoperto da Herchel nel 1781. Cerere, Pallade, Giunone, e Vesta sono stati trovati dal 1801 in quà, il primo da' Piazzi, il secondo ed il quarto da Olbers, e il terzo da Harding.

145. Era stato notato prima da Lambert, poi da Bode, esistere nella distanze eliocentriche dei pianeti una progressione, la quale restava interrotta tra Marte, e Giove. Or la media aritmetica fra le distanze de' suddetti quattro pianeti ultimamente scoperti toglie un tale interrompimento. La progressione è come segue.

Mercurio	4
Venere	4 + 3 = 7
La Terra	4 + 2 . 3 = 10
Marte	4 + 2 . 2 . 3 = 16
Pianeti nuovi	4 + 2 . 2 . 2 . 3 = 28
Giove	4 + 2 . 2 . 2 . 2 . 3 = 52
Saturno	4 + 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 = 100
Urano	4 + 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 = 196.

146. Il telescopio ha scoperto intorno a Giove quattro lune girar da occidente in oriente a differenti distanze, sette intorno a Saturno, e sei intorno ad Urano. Chiamansi elle più comunemente *satelliti* del pianeta, intorno a cui girano. Collo stesso stromento si osserva intorno a Saturno, alla distanza di circa un terzo del di lui diametro, un anello, il cui piano essendo inclinato circa 31° 19′ all'eclittica, ci si presenta sotto forma di un' elisse più, o meno stretta, e qualche volta evanescente in una linea retta.

147. Le distanze dei satelliti dai loro primarj si misurano in semidiametri di essi primarj. Come però Giove è sensibilmente rilevato all' equatore, val a dire al circolo massimo della sua rotazione, così le distanze dei satelliti di questo pianeta si misurano in diametri dell' equatore medesimo.

Satelliti di Giove	Distanze medie	Rivoluzioni sideree
I	5,6973	gior. 1,76914
II	9,0659	3,55118
III	14,4616	7,15455
IV	25,4360	16,68902

Satelliti di Satur.	Distanze medie	Rivoluzioni sideree
I	3,080	gior. 0,943
II	3,952	1,370
III	4,893	1,888
IV	6,268	2,734
V	8,754	4,517
VI	20,295	15,945
VII	59,154	79,330

Satelliti di Urano	Distanze medie	Rivoluzioni sideree
I	13,12	gior. 5,892
II	17,62	8,709
III	19,84	10,961
IV	22,75	13,462
V	45,50	38,042
VI	91,00	107,694

148. *Elongazione* di un pianeta dicesi l'angolo, sotto cui la Terra ne vede la distanza dal Sole. Mercurio, e Venere, chiamati pianeti *inferiori,* perchè le loro orbite sono abbracciate da quella della Terra, non possono mai elongarsi dal Sole più di qnanto portano le loro distanze massime. Quindi la massima elongazion di Mercurio non può mai eccedere 48° 48', nè quella di Venere 47° 42'. Tutti gli altri pianeti, chiamati *superiori,* perchè le loro orbite abbracciano quella della Terra, passano per tutte le elongazioni possibili.

149. Un pianeta è in *congiunzione* col Sole, quando è a zero di elongazion da quell'astro, e in *opposizione*, quando è a 180°. Mercurio, e Venere non possono mai essere in questo secondo caso, ma sibbene due volte nel primo, una in passando tra il Sole, e la Terra, e l'altra in ripassando al di là dal Sole: la prima dicesi *congiunzione inferiore*, e la seconda *congiunzion superiore*. Tutti gli altri pianeti subiscono e l' opposizione, e la congiunzion superiore, non mai però la congiunzione inferiore.

150. Le congiunzioni superiori, e le opposizioni ci presentano a vedere il pianeta dalla sua parte illuminata, e le inferiori dalla parte oscura. Dunque i pianeti inferiori soggiacciono a delle fasi analoghe alle lunari. Marte, che tra i pianeti superiori è il più vicino alla Terra, ci mostra tra la congiunzione e l'opposizione qualche pò di diminuzione del suo disco illuminato, la quale giunge a nulla più di quella della Luna tre giorni avanti il suo pieno. Gli altri pianeti, attese le loro grandi distanze da noi, ci si mostrano costantemente illuminati in tutta l' estenzione, e rotondità del loro disco.

151. Allorchè la congiunzione inferior d' un pianeta accade in un nodo della sua orbita, egli si osserva progettato sul disco solare come una nera macchia, che vi descrive una corda. Due osservatori posti a sufficiente distanza l' uno dall'altro, trovano una tal projezione corrispondere nello stesso istante a differenti punti del disco. Dal confronto delle loro osservazioni deducono colla più grande esattezza la parallasse del pianeta, e quindi la sua distanza dal centro della Terra.

152. Un pianeta qualunque nella sua congiunzion superiore è alla massima distanza geocentrica, ed il suo diametro apparente è minimo. Le fasi pertanto de' pianeti inferiori sono fino ad un certo

limite superate dalle loro grandezze apparenti. Venere per es. compare della massima grandezza ; e splendore a 34° ½ di elongazione, dove ella non è illuminata che come la Luna di cinque giorni. La Terra essendo perielia, e Venere afelia, questo pianeta nella suddetta fase è visibile anche in pieno giorno. Quanto a' pianeti superiori, è chiaro dover eglino essere assai più grandi e risplendenti nelle opposizioni, che nelle congiunzioni.

153. Tutti i pianeti nelle loro congiunzioni superiori, ed inferiori salgono, e tramontano l'orizzonte col Sole invisibili all' occhio nudo. Mercurio attesa la sua gran vicinanza al Sole è sempre immerso nei raggi di quest' astro, nè può distinguersi ad occhio nudo, che qualche rara volta nelle sue più grandi elongazioni. Urano per la sua grande distanza, e i quattro nuovi pianeti per la loro estrema piccolezza non possono osservarsi che col telescopio.

154. Un pianeta, passata che ha la congiunzione superiore, comincia a comparirci la sera a ponente dopo il trammonto del Sole. Il suo moto apparente è allora *diretto*, cioè a dire secondo l'ordin de' segni, e noi lo troviamo ogni sera sempre più avvanzato all'oriente. Ma un tal moto va continuamente scemando, e il pianeta volgendo verso la seconda congiunzione, s' egli è inferiore, o l' opposizione, se è superiore, diventa per alcuni dì *stazionario*, e successivamente *retrogrado* a gradi, che successivamente crescendo fino al momento della congiunzione od opposizione, poi col ordin medesimo decrescendo, il rendon stazionario di nuovo, per restituirgli il primiero suo stato.

155. Tutte queste apparenze dipendono dal moto, che fa il raggio visuale intorno all' occhio dell' osservatore tratto simultaneamente, e sotto direzioni sempre varianti, dalla Terra, e dal pianeta posti a' suoi estremi. Nella congiunzion supe-

riore i moti reali di questi due globi sono direttamente contrarj l'un all'altro, e cospiran così a volgere il raggio visuale pel medesimo verso: ecco il moto diretto. Nella congiunzione inferiore, o nell'opposizione procedono pel medesimo verso; ma la velocità del globo più vicino al Sole vincendo quella del più lontano (*n.*° 148 *Tab.*), il raggio visuale si trova dal di lui eccesso obbligato a volgere in senso contrario all'antecedente: ecco il moto retrogrado. Prima e dopo quest' epoca un tale eccesso, a cagione del variare che fan d' inclinazione tra loro i due moti reali, passa per tutti i gradi minori, e per conseguenza pel zero; quivi pertanto il raggio visuale non è che trasportato parallelamente a se stesso senza rotazione veruna: ed ecco il pianeta comparir stazionario.

156. Un satellite si eclissa, e scompare ogni volta, che entra nel cono d' ombra, che il suo primario progetta dietro se per rispetto al Sole. Gli eclissi dei satelliti di Giove si trovano in tutte le Effemeridi calcolati anticipatamente d' uno, o più anni. Sono essi d' un uso grandissimo a trovar le distanze in longitudine dei luoghi, in cui sono osservati. Queste osservazioni non possono farsi in mare, a cagione dell' instabilità del vascello, e delle picciolezze di tali astri.

157. L'allungamento grandissimo delle elissi delle comete non ci permette di veder questa specie di astri, che per poco tratto verso il loro perielio, nè per conseguenza di riconoscerne da un solo apparimento l' intero giro, e la sua durata. Se però la distanza perielia di una cometa, le posizioni del perielio, e dei nodi, e l' inclinazione dell' orbita al pian dell' eclittica si trovano assai press' a poco gli stessi coi già stati osservati in un' altra; egli è probabilissimo, che l' una sia la stessa che l' altra.

158. Atteso il poco tempo, che gli astronomi

si sono applicati a diligentemente osservar le comete, in confronto de' lunghissimi loro periodi, noi non ne conosciamo finor con certezza, che il tempo della rivoluzion d' una sola, quella cioè dell' anno 1682, che Halley trovò identica con quelle degli anni 1531, e 1607, e di cui predisse il ritorno pel 1759, come in fatti avvenne. Il di lei periodo è di circa 76 anni, l' asse maggiore della sua orbita di 35, 9 semidiametri medj dell' orbita terrestre, e la distanza perielia di 0, 58.

159. Le comete si mostran mai sempre accompagnate da una nebulosità, che spesso si stende in una lunga coda diretta per rispetto al Sole al di là del disco. Egli è probabilissimo, che il sommo calor, ch' elle provano ne' loro perielj, rarefaccia le materie congelate dal freddo eccessivo, che provarono negli afelj, e ne innalzi a grandissime distanze i vapori; i quali poi vengano spinti con forza dai raggi del Sole, e disciolti nella di lui stessa atmosfera.

160. La fase osservata nella cometa del 1744, la qual presentava una sola metà del disco illuminato, prova ad evidenza essere questa specie di corpi della natura stessa dei pianeti, cioè a dire opachi, e rischiarati soltanto dalla luce solare.

161. Le principali costellazioni si trovan disegnate sui globi, e sulle carte, cui bisogna riconoscere, e riscontrare un pò per notte col cielo, rendendosi familiari almeno le stelle più distinte, e conspicue. Per sapere poi all' uopo la precisa posizion d' una stella, non si ha che da ricorrere ai cataloghi, che ne han dato gli Astronomi.

CANONI

Della Trigonometria Sferica.

Un *triangolo sferico* è costituito, alla superficie di una sfera da tre archi di circoli massimi, che s' intersegano in essa. I suoi angoli dipendono dalle inclinazioni dei piani, e si misuran com' esse.

Sia ABD (Fig. 1.) un triangolo sferico, C il centro della sfera, alla di cui superficie è costituito, e CA, CD, CB tre semidiametri condotti ciascuno a ciascun de' tre angoli: saranno ABC, ADC, DBC, i tre piani degli archi AB, AD, DB, e i raggi stessi le loro intersezioni.

Del triangolo sferico rettangolo.

Pongasi il suddetto triangolo rettangolo in D, e però i due piani ADC, DBC perpendicolari l' uno all' altro. Si cali da B la BE perpendicolare a CD, e per conseguenza al piano ADC, e ad ogni retta condotta in esso pel di lei piede (*Eucl. Lib. XI. Def. III*, e *IV*); e guidata EF perpendicolare a CA, si unisca BF. Il pian del triangolo BEF, passando per la BE, sarà com' essa perpendicolare al piano ADC; e la CF, che giace in questo secondo piano, ed è perpendicolare alla di lui intersezione col primo, sarà pure perpendicolare ad esso, epperò anche alla retta BF (*Eucl. Def.^i citate*).

Ne' due triangoli rettilinei CFB, CEB, rettangoli in F, ed E, le rette BF, BE, ragguagliate al raggio CB, rappresentano i seni degli angoli BCF, BCE, o dell' ipotenusa AB, e del lato BD

del triangolo sferico, intanto che nel triangolo rettilineo BEF rettangolo in E, rappresentano il raggio, ed il seno dell'angolo rettilineo BFE, ovvero dello sferico BAD. Si ha dunque 1 : sen. A : : sen.AB : sen.BD; e quindi

CANONE I. *Il raggio al seno di un angolo, come il seno dell' ipotenusa al seno del lato opposto.*

Ne' due triangoli rettilinei CFB, CFE entrambi rettangoli in F, le rette BF, EF ragguagliate al raggio CF, rappresentano le tangenti degli angoli BCF, ECF, ovvero dell'ipotenusa AB, e del lato AD del triangolo sferico, intanto che nell'altro, triangolo BEF rappresentano il raggio, ed il coseno dell' angolo rettilineo BFE, ovvero dello sferico BAD. Si ha dunque 1:cos.A::tang.AB:tang.AD; e quindi

CANONE II. *Il raggio al coseno d' un angolo, come la tangente dell' ipotenusa alla tangente del lato adjacente.*

Finalmente nei triangoli rettilinei CEB, CFE rettangoli in E, ed F, le rette EF, EB, ragguagliate al raggio CE, rappresentano l' una il seno dell' angolo ECF, o dell' arco AD, e l' altra la tangente dell' angolo BCE, o dell'arco BD, intanto che nel triangolo BEF rappresentano, la prima il raggio, e l'altra la tangente dell' angolo rettilineo BFE, o dello sferico BAD. Si ha dunque 1:tang.A::sen.AD:tang.BD; epperò

CANONE III. *Il raggio alla tangente d' un angolo, come il seno del lato adjacente alla tangente del lato opposto.*

Dividendo l' equazione sen.A sen.AB = sen.BD, che si ha dal can. I., per l'equazione tang.Asen.AD = tang.BD, che si ha del can. III., risulta $\frac{\text{cos.A sen.AB}}{\text{sen.AD}}$ = cos.BD, e cos.A sen.AB = cos. BD sen.AD, e dividendo questa per l' equazione cos.A tang.AB = tang.AD, che si ha dal can. II, si ottien cos. AB =

$= \cos.BD \cos.AD$; onde $1 : \cos.AD :: \cos.BD : \cos.AB$; cioè

Canone IV. *Il raggio al coseno di un lato, come il coseno dell'altro lato al coseno dell' ipotenusa.*

Dividendo poi la medesima equazione $\cos.A\ \text{sen}.AB = \cos.BD\ \text{sen}.AD$ per l' equazione $\text{sen}.B\ \text{sen}.AB = \text{sen}.AD$, che si ha pure dal can. I, si ottiene $\frac{\cos.A}{\text{sen}.B} = \cos.BD$; onde $1 : \text{sen}.B :: \cos.BD : \cos.A$; cioè

Canone V. *Il raggio al seno d' un angolo, come il coseno del lato adjacente al coseno dell' altro angolo.*

Finalmente dividendo l' equazione $\text{sen}.A\ \text{sen}.AB = \text{sen}.BD$ del can. I. per l' equazione $\cos.A\ \text{tang}.AB = \text{tang}.AD$ del can. II., si ha $\text{tang}.A \cos.AB = \frac{\text{sen}.BD}{\text{tang}.AD}$. Avendosi poi dal can. III. $\frac{\text{sen}.BD}{\text{tang}.AD} = \frac{1}{\text{tang}.B} = \cot.B$, sarà $\text{tang}.A \cos.AB = \cot.B$, e $1 : \text{tang}.A :: \cos.AB : \cot.B$; cioè

Canone VI. *Il raggio alla tangente d' un angolo, come il coseno dell' ipotenusa alla cotangente dell' altro angolo.*

SCOLIO. Siccome il seno di un angolo, o di un arco è sempre eguale al seno del supplemento a 180°; così nella soluzion de' problemi, che dipendono dal primo canone, non si ha verun contrassegno a conoscere le specie del termine cercato, cioè s' egli sia minore, ovvero maggiore di 90°. In tali casi, che si chiamano *casi dubbj*, convien ricorrere alle circostanze esterne del problema, ed anche alla figura stessa, purchè siasi abbastanza ben disegnata. In tutti gli altri casi la specie del termine cercato si determina per le sole regole ordinarie dei segni: giacchè il coseno, la tangente, e

la cotangente han prefisso il segno +, ovvero −, secondo che i loro rispettivi archi, od angoli sono minori, ovvero maggiori di 90°.

PROBLEMA I.

Data l'obbliquità dell'eclittica, e il luogo del Sole, cioè a dire la sua longitudine, trovarne la declinazione, e l'ascension retta.

Sia (Fig. 2.) AD l'equatore, AB l'eclittica, l'angolo A la di lei obbliquità, che noi supporrem sempre di 23° 28', BD un arco di declinazione; e pongasi AB = 67° 19' 20''. Si avrà pel can. I, 1 : sen. 23° 28' : : sen. 67° 19' 20'' : sen. BD; e pel can. II. 1 : cos. 23° 28' : : tang. 67° 19' 20'' : tang. AD; quindi

$$\begin{array}{rcl} \log.\text{sen}.23°28' & = & 9.6001181 \\ \log.\text{sen}.67°19'20'' & = & 9.9650547 \\ \hline \log.\text{sen.BD} & = & 9.5651728 \\ \text{e BD} & = & 21°33'26'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log.\cos.23°28' & = & 9.9625076 \\ \log.\text{tang}.67°19'20'' & = & 0.3789760 \\ \hline \log.\text{tang.AD} & = & 0.3414836 \\ \text{ed AD} & = & 65°30'33'' \end{array}$$

Il valore di BD si è preso minore di 90°, perchè la declinazione del Sole non può mai superare 23° 28'. Il valore di AD si è preso anch' esso minor di 90°, perchè i primi tre termini dell'analogia essendo positivi, positivo dee pur essere l'ultimo. Che se la longitudine data fosse 112° 40' 40'', la sua tangente essendo negativa, negativa sarebbe pur necessariamente anche la tangente di AD, e per conseguenza AD = 119° 29' 27''.

PROBLEMA II.

Data l' obbliquità dell' eclittica, l' ascensione retta di un astro, e la sua declinazione, trovarne la latitudine, e la longitudine.

Sia (Fig. 3) AO l' equatore, AC l' eclittica, S un astro proposto, SB un arco di latitudine, ed SD un arco di declinazione: sarà CAO l' obbliquità dell' eclittica, AD l' ascension retta, SD la declinazione, SB la latitudine, ed AB la longitudine dell' astro medesimo computata dal punto A, che vuol essere quello di Ariete. Or nel triangolo ASD rettangolo in D, si ha l' ipotenusa AS pel can. IV. Calcolata questa, e riferita al triangolo ASB rettangolo in B, si ha pel can. I. l' arco SB, e pel can. II. l' arco AB.

PROBLEMA III.

Conosciuta la declinazione del Sole in un dato giorno dell' anno, e la durata di questo stesso giorno ad un certo luogo della Terra, trovare l' altezza del polo del medesimo luogo.

Sia (Fig. 4.) OS l' orizzonte, OP l' altezza del polo, S il Sole al suo nascere, o tramontare, PS il complemento (a) della sua declinazione, SPO il supplemento dell' angolo orario. Nel triangolo POS rettangolo in O si ha pel can. II. 1 : cos.P : : tang.PS : tang. PO.

Del triangolo sferico obbliquangolo.

Ogni triangolo sferico obbliquangolo ABC (Fig. 5. 6.) si può dividere in due rettangoli ABD, ACD col mezzo di un arco di circolo massimo AD guidato da un angolo A perpendicolarmente alla base BC.

(a) Chiamasi *complemento* tanto il difetto, quanto l' eccesso d' un arco o d' un angolo da 90°.

Senza distinguere, se quest'arco perpendicolare cada dentro il triangolo (Fig. 5), ovvero fuori (Fig. 6.), chiameremo gli angoli BAD, CAD *segmenti del vertice*, e gli archi BD, CD *segmenti della base*; BAD, BD *adjacenti* al lato AB, ed all' angolo B, ed *opposti* al lato AC, ed all'angolo C; e viceversa CAD, CD *adjacenti* al lato AC, ed all' angolo C, e opposti al lato AB, ed all' angolo B.

Applicando ad entrambi i triangoli ABD, ACD il can. I., si ha 1:sen.B::sen.AB:sen.AD, e 1:sen.C::sen.AC:sen.AD; onde sen.AD=sen.B sen.AB= sen.Csen.AC, e sen.B : sen.C::sen. AC : sen.AB; cioè

CANONE VII. *I seni degli angoli, come i seni dei lati opposti.*

Il can. II. dà 1:cos.BAD::tang.AB:tang.AD, ed 1:cos.CAD :: tang.AC : tang.AD; onde tang.AD = cos.BAD tang.AB = cos.CAD tang.AC, e cos.BAD : cos.CAD :: tang.AC : tang.AB; cioè

CANONE VIII. *I coseni dei segmenti del vertice, come le tangenti dei lati opposti.*

Il can. III. dà 1 : tang.B :: sen.BD:tang.AD, ed 1 : tang.C::sen.CD:tang.AD; onde tang.AD= sen.BD tang.B = sen.CD tang.C, e sen.BD : sen.CD:: tang.C:tang.B; cioè

CANONE IX. *I seni dei segmenti della base, come le tangenti degli angoli opposti.*

Il can. IV. dà 1 :cos.BD :: cos.AD : cos. AB, ed 1:cos.CD::cos.AD:cos.AC; onde $\cos.AD = \frac{\cos.AB}{\cos.BD} = \frac{\cos.AC}{\cos.CD}$, ossia cos.BD:cos.CD::cos.AB:cos.AC; cioè

CANONE X. *I coseni dei segmenti della base, come i coseni dei lati adjacenti.*

Il can. V. dà 1 : sen.BAD :: cos.AD : cos.B, ed 1:sen.CAD :: cos.AD : cos.C; onde $\cos.AD = \frac{\cos.B}{\text{sen}.BAD} = \frac{\cos.C}{\text{sen}.CAD}$, o sen.BAD : sen.CAD:: cos.B :cos. C, cioè

Canone XI. *I seni dei segmenti del vertice, come i coseni degli angoli adjacenti.*

L' analogia cos.BD:cos.CD :: cos.AB:cos.AC del can. X. dà cos.BD + cos.CD : cos.BD — cos.CD :: cos.AB + cos.AC : cos.AB — cos.AC, e quindi cot.$\frac{1}{2}$(BD + CD) : tang.$\frac{1}{2}$ (BD — CD) :: cot.$\frac{1}{2}$ (AB + AC) :tang.$\frac{1}{2}$ (AB—AC) ; cioè

Canone XII. *La cotangente della metà della base alla tangente della semidifferenza de' suoi segmenti, come la cotangente della semisomma dei lati alla tangente della loro semidifferenza.*

L' analogia sen.BAD:sen.CAD::cos.B:cos.C del can. XI. dà sen.BAD+sen.CAD:sen.BAD—sen.CAD :: cos. B + cos. C : cos. B — cos. C ; e quindi tang.$\frac{1}{2}$(BAD+CAD) : tang. $\frac{1}{2}$ (BAD—CAD) :: cot. $\frac{1}{2}$ (B+C) :tang.$\frac{1}{2}$ (B — C) ; cioè

Canone XIII. *La tangente della metà dell' angolo al vertice alla tangente della semidifferenza de' suoi segmenti, come la tangente della semisomma degli altri due angoli alla tangente della loro semidifferenza.*

SCOLIO. Per la risoluzione del triangolo obbliquangolo in luogo di ripassare ad uno ad un tutti i casi, ci accontenterem d'avvertire 1.° che se i dati comprendono un lato, ed un angolo, l' arco perpendicolare debb'esser guidato in modo, che d'essi riescano ipotenusa, ed angolo d' un de' triangoli rettangoli. 2.° Se poi i dati sian tre lati, ovvero tre angoli, l'arco perpendicolare si farà cadere sul lato adjacente ad uno degli angoli, ovvero dei lati cercati.

PROBLEMA IV.

Data la longitudine, e la latitudine geografica di due luoghi, trovarne la distanza.

Sia (Fig. 7) B il polo della Terra; A, C i due luoghi proposti, BA il complemento della latitudine di A, BC il complemento della latitudine di C, e l' angolo B eguale alla differenza delle loro longitudini; e cerchisi AC.

Condotto l' arco AD perpendicolare a BC, si avrà pel can. II., 1:cos.B::tang.AB:tang.BD; e quindi i segmenti BD, CD. Il can. X. poi darà cos.BD:cos.CD::cos.AB:cos.AC; e quindi AC.

Siano per un esempio i due luoghi proposti Pietroburgo, e la Concezione.

Tipo del Calcolo.

Long. di Pietroburgo, o sua distanza orientale dal primo meridiano . . .	47° 59′ 30″
Long. della Concezione 305°, che ridotta alla distanza occidentale dal primo meridiano dà	55 0 0
Distanza in longitud. delle due Città	102 59 30=B
Lat. bor. di Pietroburgo	59° 56′
Suo compl. o distanza dal polo . . .	30 4 0=AB
Lat. aust. della Concezione	36° 42′ 53″
Suo compl. o distanza dal polo . . .	126 42 53=CB

Log.—cos. B =9.351814	Log.cos.AB = 9.937238
Log.tang.AB =9.762606	C.Log.—cos.BD = 0.003647
Log.—tang.BD=9.114420	Log. cos.CD = 9.842787
BD = 172° 35′ 6″	Log.—cos.AC = 9.783672
AC = 126 42 53	AC = 127° 25′ 18″
CD = 45 52 13	60 AC = 7645, 3 miglia geog.

PROBLEMA V.

Date le latitudini di due luoghi, e la loro distanza ridotta in gradi, trovarne la differenza di longitudine, cioè a dir l'angolo, che fanno al polo i loro meridiani.

Questo problema è inverso dell' antecedente, ed è di grand' uso in mare; dove i Piloti san misurare la lunghezza del viaggio, e l' altezza del polo, o le latitudini dei luoghi, in cui la nave si trova.

I dati sono tre lati BA, BC, AC, e si cerca l' angolo B (Fig. 7). Condotto AD perpendicolare a BC; Si farà pel can. XII. cot. $\frac{1}{2}$ (AB+AC): tang. $\frac{1}{2}$(AB−AC)::cot $\frac{1}{2}$(BD+CD):tang. $\frac{1}{2}$(BD−CD), ed ottenuti i segmenti BD, CD, si avrà l'angolo B per mezzo dell' analogia tang. AB:tan. BD :: 1:cos. B del Can. II.

FINE.

PAG.	LIN.	ERRORI	CORREZIONI
6	35	dei	dai
13	27	28',	28'
15	4	gnomone	gnomone;
	18	23°, 18'	23° 28'
	33	23°,	23°
17	4	uscuro	oscuro
	20	anno,	anno;
	21	*antunno*	*autunno*
	26	sera	sfera
18	25	un altra	un'altra
20	8	Sono	sono
22	1	raginnge	raggiunger
25	7	Sedereo	sidereo
	15	Sidereo	sidereo
	16	precesione	precessiono
29	10	dall'	dell'
30	18	si	li
32	18	centro	centro,

Rosa de' Venti
N¼NO
N
N¼NE
NNE
NE¼N
NE
NE¼E
ENE
E¼NE
E
E¼SE
ESE
SE¼E
SE
SE¼S
SSE
S¼SE
S
S¼SO

B
E
D
A
2
B
A
D
P
4
S
O
A
D
A
6
C
B
D
7
B
D
C
C
A